Seis problemas resueltos de geometría

Problema 1

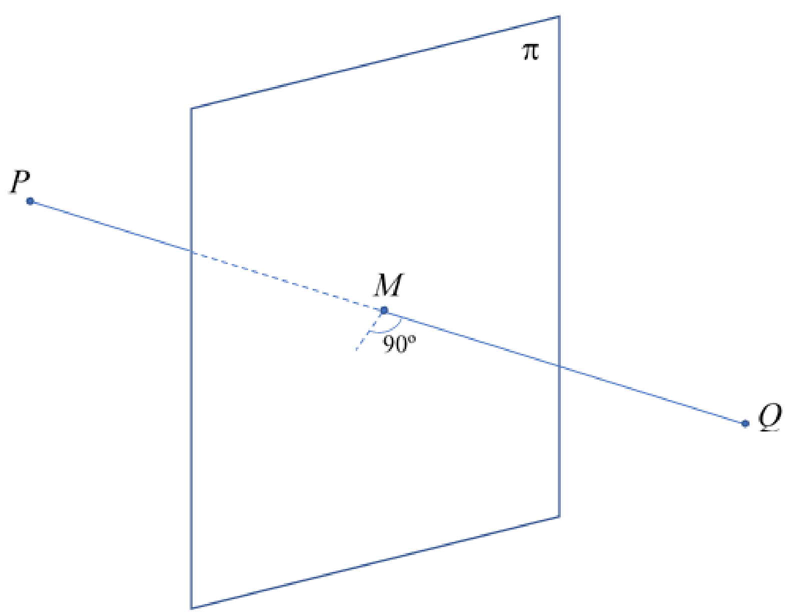
a) Dados los puntos $P(4,2,3)$ y $Q(2,0,-5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q.

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P, Q y $R(\lambda,1,0)$ pase por el origen de coordenadas.

Solución:

a) El plano π que se pide es el que pasa por el punto medio de P y Q (punto que podemos llamar M) y es perpendicular al vector que une P con Q:

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-8)$$



El punto medio M de P y Q es fácil de calcular:

$$M\left(\frac{4+2}{2},\frac{2+0}{2},\frac{3+(-5)}{2}\right) = M(3,1,-1)$$

El plano π que buscamos, por ser $\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-8)$ un vector perpendicular al mismo, tiene ecuación implícita

$$\pi \equiv -2x-2y-8z+D=0$$

Como el plano pasa por el punto M, tenemos:

$$-2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 8 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow -6 - 2 + 8 + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

Por tanto el plano π que buscamos tiene ecuación implícita

$$\pi \equiv -2x - 2y - 8z = 0$$

b) Recordemos que los puntos P y Q son $P(4,2,3)$ y $Q(2,0,-5)$. Podemos tomar como uno de los vectores directores del plano el vector $\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-8)$, o bien este otro: $\vec{u} = (1,1,4)$, que tiene la misma dirección que el anterior. Puesto que el plano también debe pasar por $R(\lambda,1,0)$, otro vector director de tal plano será $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (4-\lambda,1,3)$. De este modo disponemos de un punto P y de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que definen el plano determinado por los puntos P, Q y R. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 4 + \alpha + (4-\lambda)\beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 4\alpha + 3\beta \end{cases}$$

La ecuación general o implícita del plano se obtiene desarrollando la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 4-\lambda \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el plano anterior ha de pasar por el origen de coordenadas la ecuación debe cumplirse para $x=0$, $y=0$, $z=0$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 4-\lambda \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-12 - 3 - 32 + 8\lambda) - (-12 + 3\lambda - 6 - 16) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\lambda - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{5}$$

Problema 2

Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a\,,b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes.

b) Razona para qué valores de $a\,,b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes.

c) Razona para qué valores de $a\,,b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares.

Solución:

Consideremos el sistema formado por ambos planos:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ 2x - 4y - 2z = b \end{cases}$$

La matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada $A|b$ son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & b \end{pmatrix}$$

a) Para que ambos planos sean coincidentes los rangos de ambas matrices deben ser igual a uno y, por tanto, las dos filas de ambas matrices han de ser proporcionales, lo que nos lleva a la siguiente expresión:
$$\frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = \frac{4}{b}$$
De donde claramente han de ser $a = -1$ y $b = -8$.

b) Para que ambos planos sean paralelos no coincidentes el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser igual a uno y el de la ampliada igual a dos, lo que nos lleva ahora a la siguiente expresión:
$$\frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{b}$$
Luego en este caso debe ser $a = -1$ y $b \neq -8$.

c) Para que ambos planos sean perpendiculares basta que también lo sean sus vectores normales o perpendiculares. El vector normal del plano π es $\vec{u} = (a, 2, 1)$ y el vector normal del plano π' es $\vec{v} = (2, -4, -2)$. Por tanto:

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, su producto escalar ha de ser igual a cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Por tanto, para que π y π' sean perpendiculares debe ser $a = 5$ y b puede tomar cualquier valor.

Problema 3

Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan a la recta r.

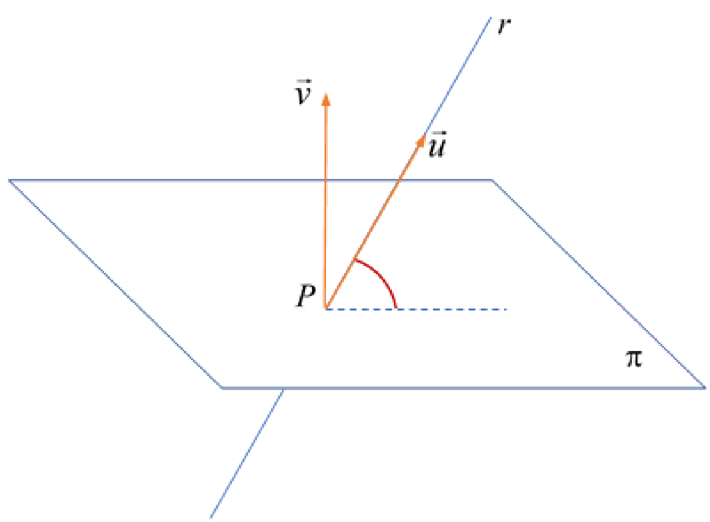
b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan a la recta s.

Solución:

a) Es fácil demostrar que el plano π y la recta r se cortan en un punto. Si sustituimos las ecuaciones de r en el plano π tenemos:

$$1 + \lambda - (-1 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Además el punto de corte de π y r será el punto $P(0, 2, 0)$.
El ángulo de la recta y el plano ha de ser el complementario del ángulo que formen la recta y un vector perpendicular del plano. Es decir, el complementario del ángulo que forman un vector director de la recta y un vector perpendicular al plano.



Pero es que, en este caso, un vector director de la recta es $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y un vector perpendicular al plano es $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Como los vectores son iguales el ángulo que forman es cero, es decir, el plano π y la recta r son perpendiculares.
De lo anterior se deduce que hay infinitos planos perpendiculares a π que contienen a la recta r, precisamente todos los planos del haz de base la recta r.

b) Consideremos el sistema formado conjuntamente por el plano π y la recta s:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes del sistema anterior es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $|A| = 2 - 4 = -2 \neq 0$, con lo que el rango de la matriz de los coeficientes es igual a tres, que coincidirá también con el de la matriz ampliada y con el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible determinado (solución única), lo que quiere decir que el plano π y la recta s son secantes: se cortan en un punto P (nos podemos hacer una idea observando la figura anterior).
En este caso solamente hay un plano perpendicular a π que contenga a la recta s. Precisamente el plano determinado por P, un vector normal del plano π y un vector director de la recta s. Todos los demás planos del haz de base la recta s ya no son perpendiculares al plano π.

Problema 4

a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

esté contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r.

Solución:

a) Las ecuaciones continuas de la recta son

$$x-1=\frac{y-k}{-1}=z$$

Y de aquí obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\begin{cases} -x+1=y-k \\ x-1=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1+k \\ x-z=1 \end{cases}$$

Si a estas ecuaciones añadimos la ecuación del plano tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=1+k \\ x-z=1 \\ x+2y+z=7 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas a este sistema son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1+k \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es al menos dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1\neq 0$$

Pero además se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

pues la tercera columna es igual a la segunda menos la primera. De aquí se deduce que el rango de la matriz de los coeficientes es igual a dos: $r(A)=2$. Pero es que, además,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=(1+2+2k)-(7+2)=2k-6$$

De aquí se deduce que si $k\neq 3$, el rango de la matriz ampliada es tres: $r(A|b)=3$. En este caso el sistema es incompatible (no tiene solución). Sin embargo, si $k=3$, $r(A|b)=r(A)=$

$2 < 3 = n$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
De lo anterior hemos de deducir que la recta estará contenida en el plano en el caso de que haya infinitas soluciones (la propia recta) y esto ocurre, como hemos visto, cuando $k = 3$.

Hay otra forma de hacer este apartado. Además es mucho más rápida que la anterior.
Para que la recta esté contenida en el plano, cualquier punto de la recta debe satisfacer la ecuación del plano, es decir, sea quien sea $\lambda \in \mathbb{R}$, se ha de cumplir:

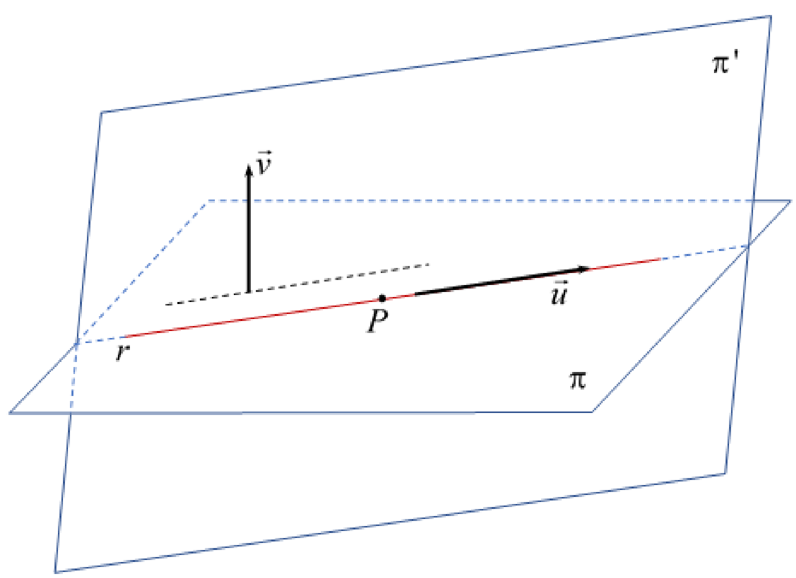
$$1 + \lambda + 2(k - \lambda) + \lambda = 7 \Leftrightarrow 1 + \lambda + 2k - 2\lambda + \lambda = 7 \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

Por tanto, para este valor de k la recta está contenida en el plano. Para cualquier otro valor de k la ecuación $2k = 6$ daría lugar a una contradicción y, en ese caso, no existe ningún punto en común entre la recta y el plano, es decir, son paralelos.

b) Sea un punto P de r (que también lo será de π): $P(1, 3, 0)$. Sea también un vector director de r: $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Tomemos también un vector normal o perpendicular al plano π: $\vec{v} = (1, 2, 1)$. El plano π' determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es claramente perpendicular a π y su intersección con éste es claramente la recta r pues pasa por $P \in r$ y tiene la dirección de un vector director de r. Hallemos pues la ecuación implícita de π':

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-3 & -1 & 2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-x + 1 + 2z + y - 3) - (-z + y - 3 + 2x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 3z + 3 = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x - z - 1 = 0$$



Problema 5

a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = -y = z \quad ; \quad s \equiv x = y = z - 2$$

b) Calcular la distancia entre r y s.

Solución:

a) Un punto y un vector director de r son $A(0,0,0)$ y $\vec{u} = (1,-1,1)$. Un punto y un vector director de s son $B(0,0,2)$ y $\vec{v} = (1,1,1)$. Consideremos el vector $\overrightarrow{AB} = (0,0,2)$ y las matrices

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de la primera matriz es dos porque contiene un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$$

El rango de la segunda matriz es tres porque su determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0$$

Por tanto las rectas r y s se cruzan.

b) Para hallar la distancia entre r y s hallaremos el plano π que contiene a s y es paralelo a r. Las ecuaciones implícitas de la recta s son:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

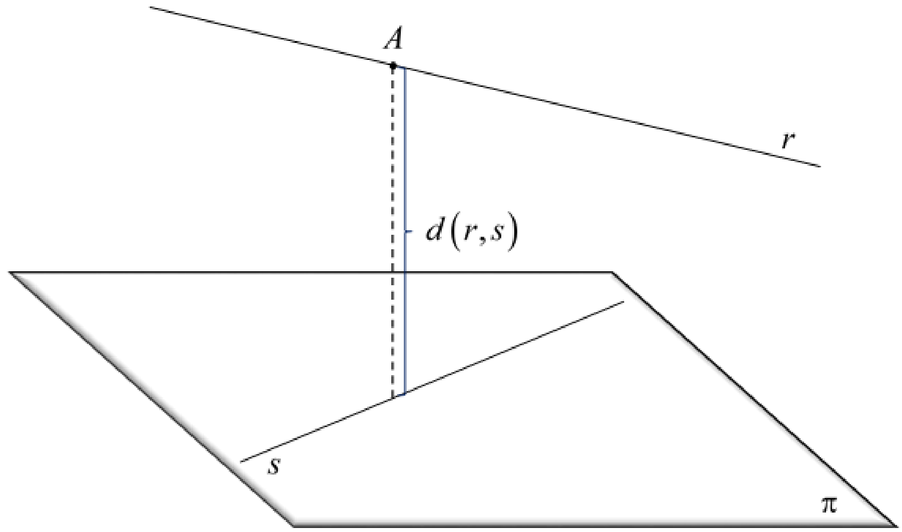
El haz de planos de arista la recta s será entonces:

$$\lambda(x-y) + \mu(x-z+2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+\mu)x - \lambda y - \mu z + 2\mu = 0$$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda+\mu, -\lambda, -\mu)$ sea perpendicular al vector director de r, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

$$(\lambda+\mu, -\lambda, -\mu) \cdot (1,-1,1) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Así, podemos elegir $\lambda = 0$, $\mu = 1$, con lo que $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.



La distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre la recta r y el plano π recién hallado. Esta distancia coincide con la distancia entre cualquier punto P de r y el plano π. En general, la distancia de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Por tanto, en nuestro caso, teniendo en cuenta que $A(0, 0, 0) \in r$:

$$d(r, s) = d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Problema 6

a) Calcula la distancia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta

$$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

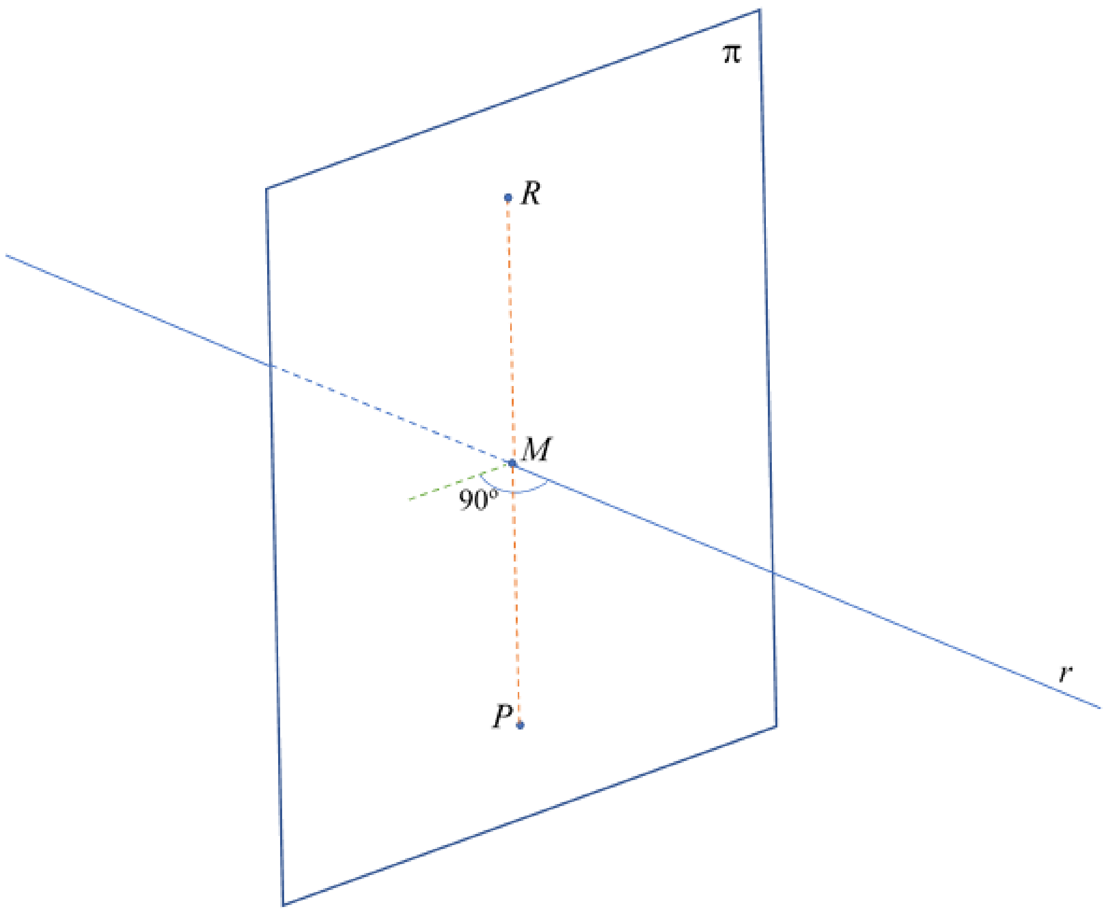
a) No es difícil obtener las ecuaciones paramétricas de r:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hallaremos el plano π, perpendicular a r que contiene al punto P. Evidentemente, un vector normal de este plano será un vector director de r, que es $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Por tanto, la ecuación general del plano será de la forma $x - y + z + D = 0$. Además, como este plano ha de contener al punto $P(-1, 2, 0)$, tenemos que: $-1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3$. Entonces:

$$\pi \equiv x - y + z + 3 = 0$$

Este plano debe cortar a la recta r en un punto M. Entonces, la distancia del punto P a la recta r coincidirá con la distancia del punto P al punto M, o lo que es lo mismo, con el módulo del vector $\overrightarrow{PM}$ (ver figura siguiente).



Sustituyendo un punto cualquiera de la recta en el plano, tenemos:

$$1 + \lambda - 1 + \lambda + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo tenemos que el punto de corte de la recta r con el plano π es $M(0, 2, -1)$, con lo que $\overrightarrow{PM} = (1, 0, -1)$. Finalmente, la distancia de P a r será:

$$d(P, r) = d(P, M) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Hay otra forma de hallar la distancia entre un punto P y una recta r, que consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$d(P,r) = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3)|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

donde $P(p_1, p_2, p_3)$ es el punto en cuestión y $A(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ son un punto y un vector director de la recta, respectivamente.
En nuestro caso $P(-1, 2, 0)$ y un punto y un vector director de r son, respectivamente: $A(1, 1, 0)$, $\vec{u} = (1, -1, 1)$. De este modo:

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3) = (-2, 1, 0) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3) = (i + 2k) - (k - 2j) = i + 2j - k$$

Por tanto:

$$d(P,r) = \frac{|(1, 2, -1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

b) Llamemos R al punto simétrico de P respecto de r. Está claro entonces que M es el punto medio de R y P (ver figura anterior). Por tanto, si notamos $R(a, b, c)$ tenemos que:

$$\frac{a - 1}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{b + 2}{2} = 2 \quad ; \quad \frac{c}{2} = -1$$

De donde rápidamente se deduce que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -2$ con lo que el punto simétrico de P respecto de r es $R(1, 2, -2)$.