Aplicaciones de las derivadas. El teorema del valor medio

Ya hemos hablado en un par de artículos anteriores del concepto de derivada y de su interpretación tanto desde el punto de vista geométrico como desde el punto de vista físico. Son los siguientes:

- La derivada y la recta tangente a una curva.
- El problema de la velocidad. Derivada de una función. Ejemplos de derivadas.

En este artículo desarrollaremos las propiedades de las funciones derivables y se pondrá de manifiesto la importancia y utilidad del concepto de derivada.

Los resultados más destacados harán referencia a funciones derivables en un intervalo, tal y como ocurría con las funciones continuas.

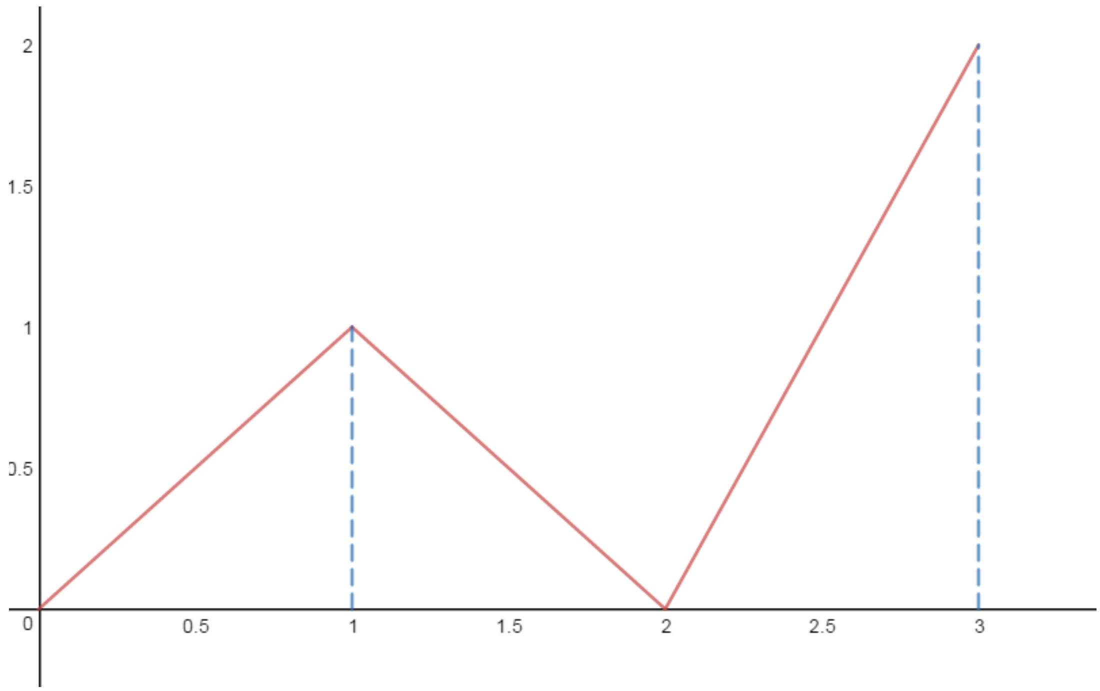
Comenzaremos introduciendo el concepto de extremo relativo.

Definición 1.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y a un punto de A. Diremos que f alcanza un *máximo relativo* (respectivamente, *mínimo relativo*) en el punto a si existe un número real positivo δ tal que el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$ está contenido en A y para todo x de dicho intervalo se tiene: $f(x) \leqslant f(a)$ (respectivamente, $f(x) \geqslant f(a)$).
Diremos que f alcanza un *extremo relativo* en el punto a cuando f alcance un máximo relativo o un mínimo relativo en a.
Al intervalo abierto del tipo $(a-\delta, a+\delta)$, centrado en el punto a, se le llama también *entorno* del punto a y se le suele designar mediante la notación $V_\delta(a)$.
Podríamos decir incluso que f alcanza un máximo relativo en el punto a de A si existe un cierto intervalo abierto I que contiene al punto a y tal que $f(x) \leqslant f(a)$ para todo x situado en $I \cap A$ (análoga definición para mínimo relativo invirtiendo la desigualdad).

Es conveniente analizar con detalle la definición anterior y, sobre todo, compararla con la noción de máximo o mínimo absoluto (que se vio en el artículo dedicado a la propiedad de compacidad para funciones continuas). La relación entre ambos conceptos se puede clarificar con el siguiente ejemplo.
Sea $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

cuya representación gráfica es



Es inmediato comprobar que la imagen de f es el intervalo $[0,2]$. Resulta por tanto que f alcanza su mínimo absoluto en los puntos 0 y 2. Es claro que f alcanza un mínimo relativo en 2, pues basta tomar $\delta = 1$ en la definición anterior; sin embargo f no alcanza un mínimo relativo en cero, pues no hay ningún intervalo abierto de centro cero contenido en $[0,3]$. Tomando también $\delta = 1$ en la definición, comprobamos fácilmente que f alcanza un máximo relativo en el punto 1, pero no alcanza su máximo absoluto en 1, ya que $f(1) = 1 \neq 2$. Finalmente f alcanza su máximo absoluto en 3, pero no alcanza un máximo relativo en 3.

Resumiendo, si una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo (respectivamente, mínimo) absoluto en un punto $a \in A$, f no tiene por qué alcanzar un extremo relativo en a, de hecho lo alcanza si, y solo si, existe un intervalo abierto de centro a contenido en A. Además, si f alcanza un extremo relativo en a, puede ocurrir que f no alcance en a ni su máximo ni su mínimo absolutos, de hecho f no tiene por qué tener máximo ni mínimo absolutos y puede incluso no estar acotada.

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para que una función derivable en un punto alcance un extremo relativo en él.

Proposición 1.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y supongamos que f alcanza un extremo relativo en un punto a de A en el que f es derivable. Entonces $f'(a) = 0$.

Demostración.
Sea la función h definida de la siguiente manera:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si} \quad x\neq a\\ f'(a) & \text{si} \quad x=a\end{cases}$$

Como f es derivable en a, entonces $\lim\limits_{x\to a}h(x)=f'(a)=h(a)$, con lo que h es continua en a. Supongamos que $h(a)>0$. Según el lema de conservación del signo, existe $\delta>0$ tal que $h(x)>0$ para todo x del intervalo $(a-\delta,a+\delta)$. Esto quiere decir que el numerador y el denominador de $h(x)$ tienen el mismo signo, para todo $x\neq a$ en ese intervalo. Dicho de otro modo, $f(x)>f(a)$ cuando $x>a$, y $f(x)<f(a)$ cuando $x<a$. Esto contradice la hipótesis de que f alcanza un extremo relativo en a. Luego, la desigualdad $h(a)>0$ es imposible. De manera similar se demuestra que tampoco puede ser $h(a)<0$. Por consiguiente ha de ser $h(a)=0$, o sea, $f'(a)=0$, tal y como se quería demostrar.

Es importante notar que el hecho de que la derivada se anule en a no implica que f alcance un extremo relativo en a (la condición anterior era necesaria, pero no es suficiente). Por ejemplo, sea la función $f(x)=x^3$. Puesto que $f'(x)=3x^2$, tenemos que $f'(0)=0$. Sin embargo, esta función es creciente en todo intervalo que contenga al origen, por lo que 0 no es extremo relativo.

Por poner otro ejemplo, la función $f(x)=|x|$ demuestra que un cero de la derivada no siempre se presenta en un extremo. Aquí hay un mínimo relativo en 0, pero en el mismo punto 0 la función no es derivable (0 es un punto "anguloso" y en este tipo de puntos no existe la derivada). Lo que dice la proposición anterior es que cuando la gráfica es "suave" (o lo que es lo mismo, en ausencia de puntos "angulosos"), la derivada necesariamente debe anularse en un extremo, si éste se presenta en el interior de un intervalo.

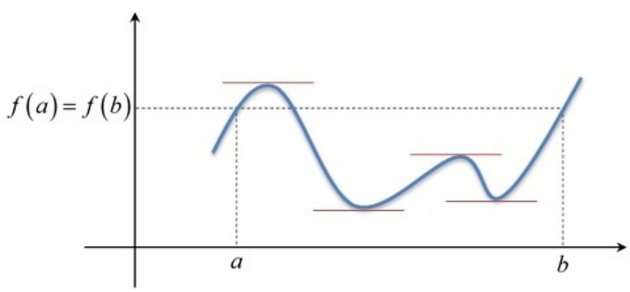
El teorema del valor medio

El teorema del valor medio para derivadas es importante en Análisis Matemático porque muchas de las propiedades de las funciones pueden deducirse fácilmente a partir de él. Antes de establecer el teorema del valor medio, examinaremos uno de los casos particulares a partir del cual puede deducirse el teorema general. Este caso particular lo descubrió Michel Rolle (1652-1719), matemático francés.

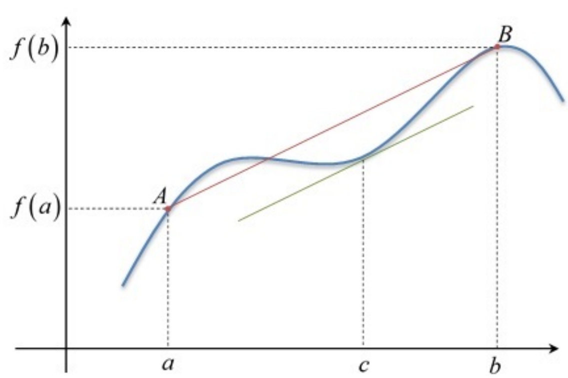
Teorema 1 (de Rolle).
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe un punto c del intervalo (a,b) tal que $f'(c)=0$.

Demostración.
Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo abierto (a, b). Como f es una una función continua en $[a, b]$, la propiedad de compacidad nos asegura que f debe alcanzar su máximo absoluto M y su mínimo absoluto m en algún punto del intervalo cerrado $[a, b]$. Además, la proposición anterior nos dice que ningún extremo puede ser alcanzado en puntos interiores (de otro modo sería nula la derivada allí). Luego, ambos valores extremos son alcanzados en los extremos a y b. Pero como $f(a) = f(b)$, esto significa que $m = M$, y por tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el hecho de que $f'(x) \neq 0$ para todo x en (a, b). Resulta pues que $f'(c) = 0$ por lo menos en un punto c que satisfaga $a < c < b$, lo que demuestra el teorema.

El significado geométrico del teorema de Rolle está representado en la figura siguiente. En este teorema se afirma tan sólo que la curva debe tener al menos una tangente horizontal en algún punto entre a y b.



El teorema de Rolle se utiliza para demostrar el teorema del valor medio. Antes de enunciarlo, vamos a examinar su significado geométrico. Observemos la figura siguiente.



La curva dibujada es la gráfica de una función f continua con tangente en cada punto del intervalo (a, b). En el punto c indicado, la tangente es paralela a la cuerda AB. El teorema del valor medio asegura que existirá *por lo menos un punto* con esta propiedad.

Para traducir al lenguaje matemático esta propiedad geométrica, tan sólo necesitamos observar que el paralelismo de dos rectas significa la igualdad de sus pendientes. Puesto que la pendiente de la cuerda es el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y ya que la pendiente de la tangente en c es la derivada $f'(c)$, la afirmación anterior puede expresarse así:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

para algún c del intervalo abierto (a,b).

Para hacer más intuitiva la validez de la fórmula anterior, podemos imaginar $f(t)$ como el camino recorrido por una partícula móvil en el tiempo t. Entonces el cociente del primer miembro de la fórmula representa la velocidad *media* en el intervalo de tiempo $[a,b]$, y la derivada $f'(t)$ representa la velocidad instantánea en el tiempo t (ver artículo dedicado al problema de la velocidad). La igualdad afirma que debe existir un momento en que la velocidad instantánea es igual a la velocidad media. Por ejemplo, si la velocidad media de un automóvil en un viaje es de 90 km por hora, el velocímetro debe registrar 90 km por hora *por lo menos una vez* durante el viaje.

Teorema 2 (del valor medio).
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces existe un punto c del intervalo abierto (a,b) tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Demostración.
Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x)=(f(b)-f(a))x-(b-a)f(x)\,,\forall\,x\in[a,b]$$

Claramente g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con

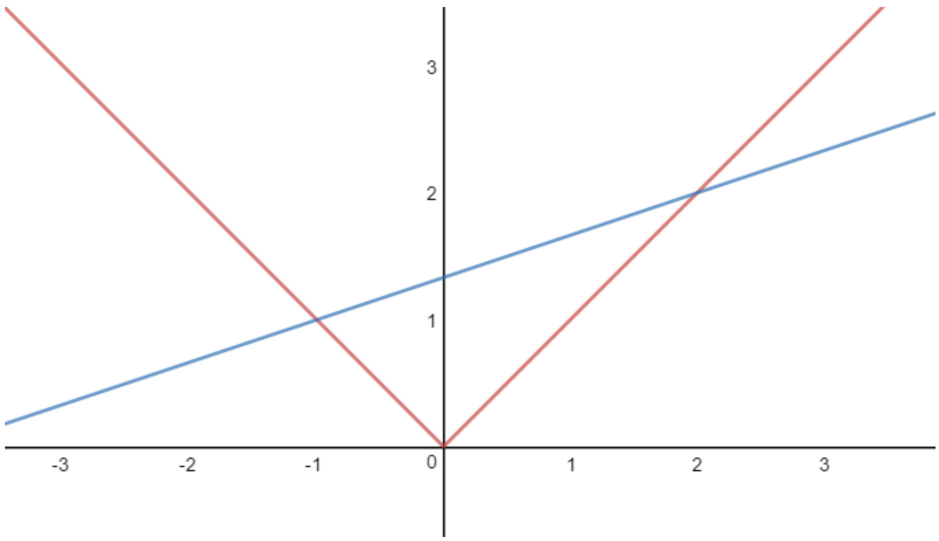
$$g'(x)=(f(b)-f(a))-(b-a)f'(x)\,,\forall\,x\in(a,b)$$

Además, es fácil comprobar que $g(a)=g(b)$. Por el teorema de Rolle existe $c\in(a,b)$ tal que $g'(c)=0$, esto es, tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Obsérvese que el teorema anterior no concreta nada acerca de la posición exacta del "valor o valores medios" c, y sólo indica que todos pertenecen al intervalo abierto (a,b). Para algunas funciones se puede especificar con exactitud la posición de los valores medios, pero en la mayoría de los casos es muy difícil hacer una determinación precisa de estos puntos. Sin embargo, la utilidad real del teorema está en el hecho de que se pueden sacar muchas conclusiones del mero conocimiento de la *existencia* de un valor medio por lo menos.

También es importante comprobar que el teorema del valor medio puede dejar de cumplirse si hay algún punto entre a y b en el que la derivada no exista. Por ejemplo, la función f definida por la ecuación $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y tiene derivada en todos los puntos del mismo excepto en 0 (obsérvese en la figura siguiente que en 0 hay un punto anguloso y por tanto no es derivable en él).



La pendiente de la cuerda que une el punto $(2, f(2))$ con el punto $(-1, f(1))$ es

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

pero la derivada no es igual a $\frac{1}{3}$ en ningún punto.

Teorema 3.
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I.

i) f es creciente si, y sólo si, $f'(a) \geqslant 0 \,, \forall\, a \in I$.

ii) f es decreciente si, y sólo si, $f'(a) \leqslant 0 \,, \forall\, a \in I$.

iii) Si $f'(a) = 0 \,, \forall\, a \in I$, entonces f es constante.

iv) Supongamos que $f'(a) \neq 0 \,, \forall\, a \in I$. Entonces f es estrictamente monótona y ocurre una de las dos posibilidades siguientes:

$$f'(a) > 0 \,, \forall\, a \in I \quad \text{o bien} \quad f'(a) < 0 \,, \forall\, a \in I$$

v) El conjunto $f'(I) = \{f'(x) \, : \, x \in I\}$ es un intervalo (teorema del valor intermedio para las derivadas).

Demostración.

i) Supongamos que f es creciente. Para cualesquiera $a, x \in I$ con $x \neq a$ se tiene

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

de donde $f'(a) \geqslant 0 \, , \forall \, a \in I$.
Recíprocamente, supongamos que $f'(a) \geqslant 0 \, , \forall \, a \in I$ y sean $x, y \in I$ con $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio a la restricción de f al intervalo $[x, y]$ tenemos

$$\exists \, a \in (x, y) \, : \, f(y) - f(x) = f'(a)(y - x)$$

con lo que $f(x) \leqslant f(y)$ por ser $f'(a) \geqslant 0$.

ii) Basta aplicar i) a la función $-f$.

iii) Consecuencia directa de i) y ii).

iv) Sean $x, y \in I$ con $x \neq y$ y supongamos que fuese $f(x) = f(y)$. Por el teorema de Rolle existiría un punto a del intervalo abierto de extremos x e y tal que $f'(a) = 0$, lo cual es una contradicción. Así pues f es inyectiva, pero también es continua, luego es estrictamente monótona en virtud del teorema 1 del artículo dedicado al estudio de las funciones continuas e inyectivas. Finalmente, aplicando i) y ii) tenemos que, o bien $f'(a) \geqslant 0 \, , \forall \, a \in I$ o bien $f'(a) \leqslant 0 \, , \forall \, a \in I$ lo que, junto con $f'(a) \neq 0 \, , \forall \, a \in I$, concluye la demostración.

v) Sean $a, b \in f'(I)$ con $a < b$ y sea $c \in (a, b)$. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $c \notin f'(I)$. Sea $g : I \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = f(x) - cx \, , \forall \, x \in I$. Es claro que g es derivable en I y como $f'(x) \neq 0 \, , \forall \, x \in I$, se tiene $g'(x) \neq 0 \, , \forall \, x \in I$. Aplicando iv) a la función g obtenemos que, o bien $f'(x) - c = g'(c) > 0 \, , \forall \, x \in I$ o bien $f'(x) - c = g'(c) < 0 \, , \forall \, x \in I$. En el primer caso, al ser $f'(x) > c \, , \forall \, x \in I$, llegaríamos a que $a \notin f'(I)$ y, en el segundo, al ser $f'(x) < c \, , \forall \, x \in I$, obtendríamos que $b \notin f'(I)$. En ambos casos llegamos a una contradicción. Por tanto $c \in f'(I)$ y hemos probado que $[a, b] \subset f'(I)$, luego $f'(I)$ es un intervalo.

La hipótesis de que I sea un intervalo en el teorema anterior es esencial. Por ejemplo, consideremos el conjunto $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [2, 3] \end{cases}$$

Claramente f es derivable en A con $f'(a) = 0\,,\forall\, a \in A$; sin embargo f no es constante. No es difícil dar contraejemplos para ver que el resto de las afirmaciones del teorema son falsas si I no es un intervalo.

Hagamos notar también que la afirmación recíproca de iv) no es cierta. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3\,,\forall\, x \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente y derivable en $\mathbb{R}$ pero $f'(0) = 0$. Por tanto, si f es una función estrictamente creciente y derivable en un intervalo I, sólo podemos afirmar (parte i) del teorema) que $f'(x) \geqslant 0\,,\forall\, x \in I$, pero no que $f'(x) > 0\,,\forall\, x \in I$. Semejante comentario puede hacerse de las funciones estrictamente decrecientes.

A continuación vamos a dar interesantes aplicaciones del teorema anterior. La primera es una condición suficiente para que una función alcance un extremo relativo en un punto, utilizada muy a menudo en la práctica.

Corolario 1.
Sea a un número real, δ un número real positivo, $I = (a-\delta, a+\delta)$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $I - \{a\}$. Entonces:

i) Supongamos que $x \in I\,, x < a \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$ y que $x \in I\,, x > a \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$. Entonces f alcanza su máximo absoluto en a. Por tanto cualquier extensión de f alcanza un máximo relativo en a.

ii) Supongamos que $x \in I\,, x < a \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$ y que $x \in I\,, x > a \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$. Entonces f alcanza su mínimo absoluto en a. Por tanto cualquier extensión de f alcanza un mínimo relativo en a.

Demostración.

i) Aplicando el teorema anterior, la restricción de f al intervalo $(a-\delta, a)$ (respectivamente, $(a, a+\delta)$) es creciente (respectivamente, decreciente). Sea $x \in (a-\delta, a)$ y sea la sucesión $\{x_n\} = \{a - \frac{a-x}{n+1}\}$. Claramente $x < x_n < a\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to a$, con lo que se tiene que $f(x) \leqslant f(x_n)\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\{f(x_n)\} \to f(a)$ (por ser f continua en a). Así, $f(x) \leqslant f(a)\,,\forall\, x \in (a-\delta, a)$. Razonando de manera similar, se demuestra que si $x \in I$ y $x > a$, entonces $f(x) \leqslant f(a)$. En suma, $f(x) \leqslant f(a)\,,\forall\, x \in I$, como se quería.

ii) Aplíquese i) a la función $-f$.

La afirmación iii) del teorema anterior es de gran utilidad. Un enunciado, evidentemente equivalente, de la misma es el siguiente: si $f, g : I \to \mathbb{R}$ son funciones derivables en el intervalo I y ser verifica que $f'(x) = g'(x)\,,\forall x \in I$, entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = g(x) + C\,, \forall\, x \in I$. O sea, que el conocimiento de la función derivada de una función derivable en un intervalo determina a dicha función salvo una constante aditiva.

Una consecuencia muy interesante de lo anterior es que si la derivada de una función es ella misma, entonces dicha función es la función exponencial de base el número e, más conocida simplemente por función exponencial.

Corolario 2.
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Supongamos que existe un número real k tal que

$$f'(x) = kf(x)\,, \forall\, x \in I$$

Entonces existe un número real C tal que

$$f(x) = C\,\mathrm{e}^{kx}\,, \forall\, x \in I$$

En particular, si $I = \mathbb{R}$, $k = 1$ y suponemos $f(0) = 1$, entonces f es la función exponencial.

Demostración.
Sea $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \mathrm{e}^{-kx} f(x)\,, \forall\, x \in I$. Se tiene que g es derivable en I y que, dado $x \in I$:

$$g'(x) = -k\,\mathrm{e}^{-kx} f(x) + \mathrm{e}^{-kx} f'(x) = -k\,\mathrm{e}^{-kx} f(x) + k\,\mathrm{e}^{-kx} f(x) = 0$$

Por la parte iii) del teorema anterior existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = C\,, \forall x \in I$, tal y como se quería.

Ya habíamos demostrado en otro artículo el teorema de la función inversa para funciones derivables. Sin embargo volvemos a enunciarlo aquí como una consecuencia o corolario, pues la parte iv) del teorema 3 facilita, en la mayoría de los casos, la comprobación de las hipótesis del citado teorema de la función inversa.

Corolario 3 (Teorema de la función inversa).
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I con $f'(a) \neq 0\,, \forall\, a \in I$. Entonces f es estrictamente monótona, f^{-1} es derivable en $f(I)$ y

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}\,, \forall\, a \in I$$

Demostración.
Por el apartado iv) del teorema 3, f es estrictamente monótona. Por el corolario 2 del artículo dedicado a las funciones continuas e inyectivas, f^{-1} es continua en $f(I)$, con lo que basta aplicar el teorema de la función inversa para funciones derivables.