# Sucesiones acotadas. Propiedades de las sucesiones convergentes

En un artículo anterior se ha definido el concepto de sucesión y de sucesión convergente. A continuación demostraremos algunas propiedades de las sucesiones convergentes y que se utilizan a menudo en las matemáticas de bachillerato a la hora de calcular límites de funciones. Nos referimos a aquello de que el límite de la suma, producto o división es la suma, producto o división de los límites (entre otras propiedades). Todo el mundo usa estas propiedades, pero... ¿de dónde vienen? A continuación lo justificamos demostrándolo para límites de sucesiones, pues el concepto de límite funcional está íntimamente ligado al de límite de una sucesión.

Antes de demostrar las propiedades de la sucesiones convergentes, definiremos unos conceptos relacionados con las sucesiones que también se utilizan a menudo. Nos referimos a las sucesiones acotadas. Para ello recordemos que un conjunto de números reales está mayorado (respectivamente, minorado) si existe un número real que es mayor o igual (respectivamente, menor o igual) que todos los del conjunto. Diremos también que un conjunto de números reales está acotado si está a la vez mayorado y minorado. Esto es lo mismo que decir que, dado $A \subset \mathbb{R}$, $A$ está acotado si existe un número real $M > 0$ tal que $M \geqslant |a|$, $\forall a \in A$ ya que, por las propiedades del valor absoluto, esto es equivalente a decir que $-M \leqslant a \leqslant M$, $\forall a \in A$, con lo que $A$ está a la vez mayorado y minorado.

$\{x_n\}$ esta mayorada $\Leftrightarrow\ \exists\, K \in \mathbb{R} \mid K \geqslant x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\{x_n\}$ esta minorada $\Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{R} \mid k \leqslant x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\{x_n\}$ esta mayorada $\Leftrightarrow\ \exists\, M \in \mathbb{R}^+ \mid M \geqslant |x_n|,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Un resultado importante es el siguiente:

***Proposición 1.***
Toda sucesión de números reales convergente está acotada.
*Demostración.*
Si $\{x_n\} \to x$ tenemos

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_1 \Rightarrow |x_n - x| < 1$$

con lo que para $n \geqslant m$:

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

lo que prueba que el conjunto $\{x_n \, : \, n \geqslant m\}$ está acotado. Pero ello implica que $\{x_n\}$ está acotada, ya que $\{x_n \, : \, n < m\}$ es finito y por tanto acotado, luego entonces el conjunto

$$\{x_n \, : \, n \in \mathbb{N}\} = \{x_n \, : \, n < m\} \cup \{x_n \, : \, n \geqslant m\}$$

es acotado, tal y como queríamos demostrar.

## Propiedades de las sucesiones convergentes

Veamos ahora la relación entre sucesiones convergentes y las tres operaciones básicas en intervienen en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: suma, producto y relación de orden. Recordamos que estas son las reglas básicas para el cálculo de límites, no sólo de sucesiones de números reales, sino también para el cálculo de límites de funciones.

***Proposición 2.***
Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones de números reales convergentes, entonces la sucesión $\{x_n + y_n\}$ es convergente y se tiene

$$\text{lím}\{x_n + y_n\} = \text{lím}\{x_n\} + \text{lím}\{y_n\}$$

*Demostración.*
Si $x = \text{lím}\, x_n$, $y = \text{lím}\, y_n$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario se tiene

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant m_1$ y $m \geqslant m_2$. Entonces, para $n \geqslant m$ se cumple que

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Con lo que, usando la definición de sucesión convergente, hemos demostrado que $\{x_n + y_n\} \to x + y$, tal y como queríamos.

***Proposición 3.***
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente a cero, e $\{y_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces la sucesión $\{x_n y_n\}$ converge a cero.
*Demostración.*
Sea $M > 0$ tal que $M > |y_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_n\} \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Entonces, para $n \geqslant m$ tenemos
$$|x_n y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$
con lo que hemos probado que $\{x_n y_n\} \to 0$.

***Corolario 1.***
Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números reales convergentes. Entonces la sucesión $\{x_n y_n\}$ es convergente y se tiene:
$$\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \lim(y_n)$$
*Demostración.*
Si $x = \lim x_n$, usando que la sucesión constantemente igual a $-x$, $\{-x\}$, converge a $-x$ y que la suma de sucesiones convergentes es convergente, tenemos que $\{x_n - x\} \to 0$. Como $\{y_n\}$ es acotada, por la proposición anterior, $\{x_n y_n - x y_n\} \to 0$. Por otro lado, si $y = \lim y_n$ se tiene claramente que $\{y_n - y\} \to 0$ y $\{x y_n - xy\} \to 0$, luego $\{x y_n\} \to xy$. Finalmente, volviendo a usar que la suma de sucesiones convergentes es convergente, tenemos
$$\{x_n y_n\} = \{x_n y_n - x y_n + x y_n\} \to 0 + xy = xy$$
tal y como queríamos demostrar.

***Proposición 4.***
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no nulos, convergente a un límite no nulo $x$. Entonces la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ converge a $\dfrac{1}{x}$.
*Demostración.*
Por ser $\{x_n\}$ convergente a $x$ y $x \neq 0$ tenemos
$$\exists\, m \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$
de donde si $n \geqslant m$ se verifica (ver las propiedades del valor absoluto) que
$$|x_n| = |x - (x - x_n)| \geqslant |x| - |x - x_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$
y por tanto, para $n \geqslant m$
$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{2}{|x|}$$
de donde se deduce que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ es acotada.
Por último, como
$$\left\{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{x - x_n}{x}\frac{1}{x_n}\right\}$$

y $\left\{\dfrac{x-x_n}{x}\right\} \to 0$, la proposición anterior nos asegura que $\left\{\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x}\right\} \to 0$, es decir, $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\} \to \dfrac{1}{x}$.

***Corolario 2.***
Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de números reales convergentes respectivamente a $x$, $y$. Supongamos que $y_n \neq 0$ para todo natural $n$ y que $y \neq 0$. Entonces la sucesión $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ converge a $\dfrac{x}{y}$.
*Demostración.*
Es consecuencia inmediata de la proposición anterior aplicada a la sucesión $\{y_n\}$ y del corolario 1.

***Proposición 5.***
Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones de números reales convergentes a los números reales $x$ e $y$, respectivamente. Supongamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \leqslant y_n\}$ es infinito. Entonces $x \leqslant y$.
*Demostración.*
Supongamos por el contrario que $x > y$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{x-y}{2} > 0$ tenemos:

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_1 \Rightarrow x_n > x - \varepsilon = \frac{x+y}{2}$$

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant m_2 \Rightarrow y_n < y + \varepsilon = \frac{x+y}{2}$$

Si tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant m_1$ y $m \geqslant m_2$, entonces si $n \geqslant m$, se tiene que $x_n > y_n$, es decir,

$$\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \leqslant y_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} \,:\, n < m\}$$

y por tanto el primero de estos dos conjuntos es finito, lo cual es una contradicción.

Es conveniente darse cuenta de que si suponemos la desigualdad estricta en la hipótesis de la proposición anterior, es decir, si suponemos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n < y_n\}$ es infinito, no podemos afirmar que se cumpla también la desigualdad estricta en la tesis, es decir, no podemos afirmar que $\lim x_n < \lim y_n$.
Por ejemplo, dadas las sucesiones $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, es muy fácil darse cuenta de que $x_n < y_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pero $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, consecuencia que en la práctica se presenta más a menudo.

***Corolario 3.***
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente y sea $a$ un número real cualquiera. Si el

conjunto $\{n \in \mathbb{N} \, : \, x_n \leqslant a\}$ (respectivamente, $\{n \in \mathbb{N} \, : \, x_n \geqslant a\}$) es infinito, se tiene $\lim x_n \leqslant a$ (respectivamente, $\lim x_n \geqslant a$).

Finalmente damos un resultado muy útil para el cálculo de límites te sucesiones, conocido popularmente como "regla del sandwich".

***Proposición 6.***
Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \, , \forall \, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son convergentes a un mismo límite $l$. Entonces $\{y_n\}$ converge a ese mismo límite $l$.
*Demostración.*
Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un natural $m$ tal que para $n \geqslant m$ se tenga simultáneamente que $|x_n - l| < \varepsilon$ y $|z_n - l| < \varepsilon$. Entonces, para $n \geqslant m$ tenemos:

$$l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

de donde $|y_n - l| < \varepsilon$ y, por tanto, $\{y_n\} \to l$.

Proponemos a continuación una serie de ejercicios con sus respectivas soluciones.

1. Probar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de números reales acotadas, entonces la sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ están acotadas.

   ***Solución.***

   Como $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son acotadas, existen $M_1$, $M_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $|x_n| \leqslant M_1$, $|y_n| \leqslant M_2$, $\forall \, n \in \mathbb{N}$.
   Entonces $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant M_1 + M_2 \, , \forall \, n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{x_n + y_n\}$ está acotada.
   Por otro lado, $|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leqslant M_1 M_2 \, , \forall \, n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que la sucesión $\{x_n y_n\}$ también está acotada.

2. Dar dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de números reales no convergentes, tales que $\{x_n + y_n\}$ sea convergente.

   ***Solución.***

   Sean $\{x_n\} = \{n\}$, $\{y_n\} = \{-n\}$. Ya se demostró en el artículo anterior (ejemplo 2) que la sucesión $\{x_n\}$ no es convergente. Por tanto, tampoco lo será $\{y_n\}$ pues, de serlo, también lo sería la sucesión $\{(-1)(-n)\} = \{n\}$, y esto es una contradicción. Sin embargo, $\{x_n + y_n\} = 0 \to 0$ (sucesión constantemente igual a cero).

3. Supongamos que $\{x_n + y_n\}$ es convergente. ¿Qué puede afirmarse sobre la posible convergencia de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$?

   ***Solución.***

   Que, o son las dos convergentes, o ninguna lo es (véase ejercicio anterior). Si, por ejemplo, fuese $\{x_n\}$ convergente e $\{y_n\}$ no fuera convergente, la sucesión $\{(x_n + y_n) - x_n\} = \{y_n\}$ sería convergente (por ser suma de convergentes), lo cual es una contradicción, pues hemos supuesto que $\{y_n\}$ no es convergente.

4. Sea $A$ un conjunto no vacío de números reales y sea $x$ un mayorante de $A$. Probar que $x$ es el supremo de $A$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de $A$ convergente a $x$.

   ***Solución.***

   Como $x$ es un mayorante de $A$, tenemos que $x \geqslant a\,,\forall\, a \in A$.

   $\Rightarrow$) Supongamos que $x = \sup A$. Por definición de supremo, para cada número real y positivo $\varepsilon$, existe $a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon$. Consideremos la sucesión $\{a_n\} = \{x - \frac{1}{n}\}$. Por lo anterior es claro que $a_n \in A\,,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos de $A$. Además, como $\{x\} \to x$ y $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, entonces $\{a_n\} = \{x - \frac{1}{n}\} \to x$.

   $\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión de elementos de $A$,$\{a_n\}$, convergente a $x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant m$, entonces $|a_n - x| < \varepsilon$, es decir, $x - \varepsilon < a_n < x + \varepsilon$. En particular, $a_m > x - \varepsilon$ y, por tanto, $x = \sup A$.

   También se puede demostrar, de forma completamente análoga, la misma afirmación cambiando mayorante por minorante y supremo por ínfimo.

5. Sea $x$ un número real cualquiera. Probar que existen cuatro sucesiones $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ convergentes a $x$, que verifican $r_n$, $s_n \in \mathbb{Q}$, $\alpha_n$, $\beta_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $r_n < x < s_n$, $\alpha_n < x < \beta_n$.

   ***Solución.***

   Sabemos por el ejercicio 2 del artículo dedicado a la existencia de los números irracionales que
   $$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \,:\, r < x\} = \text{ínf}\{s \in \mathbb{Q} \,:\, s > x\}$$
   y también que
   $$x = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \,:\, \alpha < x\} = \text{ínf}\{\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \,:\, \beta > x\}$$

   Por el ejercicio anterior es claro que existen sucesiones $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ convergentes a $x$, que verifican: $r_n$, $s_n \in \mathbb{Q}$, $\alpha_n$, $\beta_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $r_n < x < s_n$, $\alpha_n < x < \beta_n$.

6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no nulos tal que $\{x_n\} \to 0$. Probar que $\{\frac{1}{x_n}\}$ no está acotada.

   ***Solución.***

   Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\{\frac{1}{x_n}\}$ es una sucesión acotada. Entonces existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\frac{1}{x_n}| \leqslant M\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir, $|x_n| \geqslant \frac{1}{M} > \frac{1}{M+1}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Esto contradice que $\{x_n\} \to 0$. Por tanto, la sucesión $\{\frac{1}{x_n}\}$ no está acotada.

7. Mostrar con un ejemplo que, en la proposición 6, la hipótesis $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$, no se puede sustituir por la de que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\}$ sea infinito. ¿Bastaría exigir la existencia de un natural $p$ tal que para $n \geqslant p$ se verificase $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$?

   ***Solución.***

   Sean $\{x_n\} = \{0\}$, $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$ y $\{z_n\} = \{1\}$. Es claro que $\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\}$ es infinito (el conjunto de los números pares:$\{2k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$), pero $\{y_n\}$ no es convergente.
   Supongamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant p$. Sea la sucesión $\{r_n\}$ definida por
   $$r_n = \begin{cases} y_n & \text{si} \quad n \geqslant p \\ x_n & \text{si} \quad n < p \end{cases}$$
   Entonces $x_n \leqslant r_n \leqslant z_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\{r_n\}$ es convergente al mismo límite que $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$. Pero $y_n = r_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant p$. Por el ejercicio 2.11.4 $\{y_n\}$ es convergente y
   $$\lim y_n = \lim r_n = \lim x_n = \lim z_n$$