Sucesiones de números reales
Sucesiones convergentes: límite de una sucesión

Tanto en la educación secundaria obligatoria como en el bachillerato se habla poco de las sucesiones de números reales. Si acaso se dedica una unidad didáctica a las progresiones aritméticas y a las progresiones geométricas. Puesto que las sucesiones de números reales y, sobre todo, el concepto de convergencia para dichas sucesiones, son fundamentales para el estudio de las funciones reales de variable real, sobre todo en un primer curso universitario, vamos a desarrollar en este artículo los conceptos básicos relacionados con las sucesiones de números reales y con la convergencia de sucesiones dando, en este último caso, la definición más clásica de sucesión convergente y de límite de una sucesión. Intentaremos hacerlo con un lenguaje claro, sobre todo para que el alumno de bachillerato que se acerca a un grado de ciencias adquiera cierta familiaridad con estos nuevos conceptos.

Definición.
Si A es un conjunto no vacío, llamaremos *sucesión* de elementos de A a toda aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular una *sucesión de números reales* es, por definición, una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Hemos de fijar nuestra atención en que para definir una sucesión de números reales basta con asociar a cada número natural un número real. Si para cada natural n, x_n es un número real, notaremos $\{x_n\}$ a la sucesión $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Así, por ejemplo, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es la sucesión $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(n) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

sucesión que asocia al número natural 1 el número $\dfrac{1}{1} = 1$, al número natural 2 el número $\dfrac{1}{2}$, al número natural 3 el número $\dfrac{1}{3}$, y así sucesivamente.

Al número real x_n se le llama *término n-ésimo* de la sucesión $\{x_n\}$. Es importante distinguir entre la sucesión $\{x_n\}$ (que es una aplicación) y el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de sus términos (que es la imagen de la aplicación). Podemos pensar por ejemplo que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definidas por

$$x_1 = 0\,,\; x_2 = x_3 = \ldots = 1$$

$$y_1 = 1\,,\; y_2 = y_3 = \ldots = 0$$

son tales que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0\,,1\}$ mientras que claramente $\{x_n\} \neq \{y_n\}$.

Sucesiones convergentes

Definición.
Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es *convergente* si existe un número real x con la siguiente propiedad: dado un número real y positivo ε arbitrario, siempre puede encontrarse un número natural m (que dependerá del ε elegido), tal que si n es cualquier natural mayor o igual que m se tiene $|x_n - x| < \varepsilon$ (o equivalentemente $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, según las propiedades del valor absoluto). Dicho de otra forma, cualquiera sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, todos los términos de la sucesión, salvo los correspondientes a un conjunto finito de naturales, están comprendidos entre $x - \varepsilon$ y $x + \varepsilon$, entendiéndose que dicho conjunto finito de números naturales dependerá en general del número positivo ε elegido.

En caso de que ocurra lo anterior, y queramos destacar el número x cuya existencia se afirma, diremos que $\{x_n\}$ *converge* a x y escribiremos $\{x_n\} \to x$. Así pues, simbólicamente:

$$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\; \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Merece la pena traducir a lenguaje común la definición de sucesión convergente y la simbología anterior. Lo que viene a decir es que, si una sucesión converge a un número real x, todos los términos de la sucesión, a partir de uno dado, se encuentran tan cerca como queramos del número x. Obsérvese que tal notación la podríamos traducir así: "*decir que una sucesión es convergente a un número x es lo mismo que decir que, dado un número positivo cualquiera (por pequeño que este sea), la distancia entre infinitos términos de la sucesión y el número x es más pequeña que el número escogido*". Como siempre, la notación matemática, a pesar de suponer en principio un pequeño "shock" al que la lee por vez primera, es fundamental para poder demostrar que una determinada sucesión es convergente, o para demostrar otras propiedades de las sucesiones convergentes como veremos en un artículo posterior.

Antes de ver algunos ejemplos concretos de sucesiones convergentes y no convergentes, es conveniente hacer una observación importante. Si una sucesión $\{x_n\}$ es convergente, el número x al que converge la sucesión es único (o sea, una sucesión no puede converger a dos números distintos). Esto no es difícil de demostrar, pues si hubiera otro número real y al que la misma sucesión $\{x_n\}$ también convergiera, tendríamos, según la condición anterior, que dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se cumplirían simultáneamente las dos siguientes condiciones:

$$\exists\, m_1 \in \mathbb{N} : n \geqslant m_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, m_2 \in \mathbb{N} : n \geqslant m_2 \Rightarrow |y_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, si tomamos $n \geqslant m_1$ y $n \geqslant m_2$ tenemos:

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leqslant |x_n - x| + |x_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de donde por ser ε un número positivo arbitrario deducimos que $x = y$ (obsérvese que hemos utilizado esta otra propiedad del valor absoluto: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$).

Todo el razonamiento anterior nos permite introducir, por definición, el siguiente concepto.

Definición.
Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales que converge a un número real x, diremos que x es *el límite* de la sucesión $\{x_n\}$ y escribiremos $\lim x_n = x$ como notación equivalente a $\{x_n\} \to x$.

Ahora es el momento de ver algunos ejemplos concretos sobre el concepto de convergencia de una sucesión.

Ejemplo 1. Dado un número real y positivo ε cualquiera, el número $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ es claramente natural (recuerda que, dado un número real x, $\mathrm{E}(x)$ significa "parte entera de x"). Una de las propiedades de la parte entera nos asegura que $\frac{1}{\varepsilon} < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Pues bien, si escogemos el número natural $m = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, ocurre que $\frac{1}{\varepsilon} < m$, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{1/\varepsilon} > \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{m} < \varepsilon$. Por tanto, dado cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo que $n \geqslant m$, entonces $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m} < \varepsilon$. Acabamos de demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

es decir, que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0: $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$, o bien, $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Ejemplo 2. Demostremos ahora que la sucesión $\{n\}$ no es convergente. Razonaremos por reducción al absurdo. Si existiera $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{n\} \to x$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow x - \varepsilon < n < x + \varepsilon$$

pero esto es absurdo pues $\mathbb{N}$ no está mayorado. Así pues la sucesión $\{n\}$ no es convergente.

Ejemplo 3. La sucesión $\{(-1)^n\}$ tampoco es convergente. Razonaremos también por reducción al absurdo. Supongamos que existiera $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{(-1)^n\} \to x$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow |(-1)^n - x| < \varepsilon$$

Ahora consideremos tres casos.

1. $x = 0$. Entonces $|(-1)^n| < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon$, que es una contradicción pues ε es un número real y positivo arbitrario.

2. $x > 0$. En este caso cuando $n \geqslant m$ sea impar tendremos que

$$|(-1)^n - x| = |-1 - x| = |1 + x| = 1 + x < \varepsilon$$

   Luego $1 < 1 + x < \varepsilon$ y vuelve a haber una contradicción.

3. $x < 0$. En este caso cuando $n \geqslant m$ sea par tendremos que

$$|(-1)^n - x| = |1 - x| = 1 - x < \varepsilon$$

   Esto es otra vez contradictorio pues si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y $1 - x > 1$.

Hemos demostrado pues que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente. Los términos de esta sucesión son $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Obsérvese que si tomamos siempre n impar la sucesión se convierte en la sucesión $\{-1\}$, constantemente igual a -1; y que si tomamos siempre n par la sucesión se convierte en la sucesión $\{1\}$, constantemente igual a 1. Ambas sucesiones son convergentes por ser constantes, la primera a -1 y la segunda a 1. Esto no es ninguna tontería. Una sucesión $\{x_n\}$ es constante si $\{x_n\} = \{k\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, donde k es un número real cualquiera. Es muy fácil demostrar que $\{x_n\} = \{k\} \to k$. Volviendo a lo anterior, $\{(-1)^n\}$ no es convergente, pero contiene dos "subsucesiones" convergentes. El concepto de subsucesión o sucesión parcial de una sucesión lo veremos en otro artículo dedicado a las sucesiones convergentes y sus propiedades.

Ejemplo 4. Demostraremos finalmente que la sucesión $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{n^2+n-1}\right\}$ es convergente. Para poder demostrarlo deberemos de "intuir" el posible límite. El conjunto de los términos de esta sucesión es

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots\} = \left\{1, \frac{4}{5}, \frac{9}{11}, \frac{16}{19}, \frac{25}{29}, \ldots\right\}$$

términos que, aparentemente, se "acercan" cada vez más al número 1 (lo que sugiere que éste sea el límite de la sucesión). Entonces debemos acotar la expresión $|x_n - 1|$. Para ello, como en el ejemplo número 1, dado un número real y positivo ε cualquiera, tomemos $m = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Ya hemos visto que $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$. Entonces, dado $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo que $n \geqslant m$, tenemos:

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+n-1} - 1\right| = \left|\frac{1-n}{n^2+n-1}\right| =$$

$$= \frac{n-1}{n^2+n-1} \leqslant \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

Lo anterior demuestra que la sucesión $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+n-1}\right\}$ es convergente y que $\lim \left\{\dfrac{n^2}{n^2+n-1}\right\} = 1$.

El alumno de bachillerato advertirá que el cálculo del límite de la sucesión del ejemplo anterior se podría llevar a cabo usando las técnicas del cálculo de límite de funciones, es decir, calculando el límite cuando x tiende a "más infinito" de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+x-1}$$

Según las técnicas de cálculo de límites mencionadas rápidamente se sabe que el límite anterior es igual a 1 (límite en el infinito de una función racional en el que los grados de numerador y denominador coinciden: el límite es el cociente de los coeficientes líderes). Esto nos llevará, naturalmente, a pensar que $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+n-1}\right\} \to 1$.

Pero es justo al contrario. Las técnicas de cálculo de límites de funciones reales de variable real se demuestran usando previamente el concepto de convergencia de una sucesión de números reales. De hecho, para definir el concepto de límite funcional, hemos de usar el concepto de sucesión convergente. Sin embargo, en el actual bachillerato, se aprende antes a calcular límites de funciones que de sucesiones, y ello sin ni siquiera conocer con cierto rigor el concepto de límite. Este artículo ha pretendido arrojar luz sobre el significado de límite en matemáticas. Y para ello, quizás lo más adecuado sea empezar por el concepto de sucesión convergente.