Sucesiones de Cauchy. Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

Hemos dedicado varios artículos a hablar de sucesiones de números reales y de la noción de convergencia de una sucesión de números reales. De hecho, hemos visto ejemplos en los que se demostraba, haciendo uso de la definición, que una sucesión era convergente hacia cierto límite. También hemos demostrado que toda sucesión monótona y acotada es convergente, pero salvo en estos casos, para determinar si una sucesión es convergente debemos conocer de antemano su posible límite. Dedicaremos este breve artículo a obtener una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión de números reales, en términos de la propia sucesión, sin presuponer el conocimiento de un posible límite. Intuitivamente, si una sucesión de números reales es convergente, sus términos suficientemente avanzados son tan próximos entre sí como se quiera. La siguiente definición formaliza esta idea intuitiva.

Definición.
Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es de *Cauchy* si verifica la siguiente condición:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}\ :\ p, q \geqslant m \Rightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon$$

Teorema (de complitud de $\mathbb{R}$***).***
Una sucesión de números reales es convergente si, y solo si, es una sucesión de Cauchy.
Demostración.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que $\{x_n\} \to x$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant m \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, para $p, q \geqslant m$ tenemos

$$|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.
Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \geqslant m \Rightarrow |x_p - x_q| < 1$, y en particular, si $K = x_m$ y tomamos $q = m$, tenemos: $p \geqslant m \Rightarrow K - 1 < x_p < K + 1$, luego el conjunto $\{x_n\,;\, n \geqslant m\}$ es acotado. Ello implica que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\}$. Sea $x = \lim x_{\sigma(n)}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $\exists\, m_1 \in \mathbb{N}$: $n \geqslant m_1 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, y $\exists\, m_2 \in \mathbb{N}$: $n \geqslant m_2 \Rightarrow |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo que finalmente $|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$, lo que prueba que $\{x_n\} \to x$, como queríamos demostrar.

En ocasiones la condición de Cauchy se consigue probar con facilidad. A título de ejemplo, destacamos el siguiente caso.

Corolario.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe un número real K, con la condición $0 < K < 1$, y tal que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant K^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ es convergente.
Demostración.
Para cualesquiera números naturales, n y h, se tiene:

$$|x_{n+h} - x_n| \leqslant |x_{n+h} - x_{n+h-1}| + |x_{n+h-1} - x_{n+h-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$

$$\leqslant K^{n+h-1} + K^{n+h-2} + \ldots + K^n = K^n(1 + K + \ldots + K^{h-1}) = K^n \frac{1 - K^h}{1 - K} < \frac{K^n}{1 - K}$$

Como la sucesión $\frac{K^n}{1-K}$ converge a cero, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $\exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \leqslant m \Rightarrow \frac{K^n}{1-K} < \varepsilon$. Entonces si $p, q \leqslant m$, tomando $n = p$, $h = q - p$ (si $p < q$, o a la inversa si $p > q$), tenemos $|x_p - x_q| < \frac{K^n}{1-K} < \varepsilon$, lo que prueba que $\{x_n\}$ es de Cauchy y, por el teorema anterior, convergente.

Proponemos a continuación tres ejercicios. El primero y el tercero son de utilidad para demostrar la convergencia de ciertas sucesiones de números reales.

Ejercicios.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no nulos. Supongamos que existe K, con $0 < K < 1$, tal que $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ converge a cero.
   Solución.
   Como $0 < K < 1$, entonces $\{K^n\} \to 0$. Luego $\forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow K^n < \frac{\varepsilon}{|x_1|}$.
   Pero, por hipótesis, $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leqslant K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; es decir, $|x_{n+1}| \leqslant K|x_n|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, $|x_{n+1}| \leq K\,|x_n| \leq K^2\,|x_{n-1}| \leq K^3\,|x_{n-2}| \leq \ldots \leq K^n\,|x_1| < \frac{\varepsilon}{|x_1|}\,|x_1| = \varepsilon$, siempre que $n \geqslant m$. Hemos demostrado pues que $\forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, m \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow |x_{n+1}| < \varepsilon$, es decir, que la sucesión $\{x_n\}$ converge a cero.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 1$, y definamos una sucesión $\{y_n\}$ de números reales de la forma $y_1 = \frac{x_1}{\alpha}$, $y_{n+1} = y_n + \frac{x_n}{\alpha^n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{y_n\}$ es una sucesión convergente.
   Solución.
   Por ser $\{x_n\}$ acotada, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Además:

$$|y_{n+h} - y_n| \leqslant |y_{n+h} - y_{n+h-1}| + |y_{n+h-1} - y_{n+h-2}| + \ldots + |y_{n+2} - y_{n+1}| + |y_{n+1} - y_n| =$$

$$= \left|y_{n+h-1} + \frac{x_{n+h-1}}{\alpha^{n+h-1}} - y_{n+h-1}\right| + \left|y_{n+h-2} + \frac{x_{n+h-2}}{\alpha^{n+h-2}} - y_{n+h-2}\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|y_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - y_{n+1}\right| + \left|y_n + \frac{x_n}{\alpha^n} - y_n\right| =$$

$$= \left|\frac{x_{n+h-1}}{\alpha^{n+h-1}}\right| + \left|\frac{x_{n+h-2}}{\alpha^{n+h-2}}\right| + \ldots + \left|\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}}\right| + \left|\frac{x_n}{\alpha^n}\right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n}\left(\left|\frac{x_{n+h-1}}{\alpha^{h-1}}\right| + \left|\frac{x_{n+h-2}}{\alpha^{h-2}}\right| + \ldots + \left|\frac{x_{n+1}}{\alpha}\right| + |x_n|\right) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(\frac{M}{\alpha^{h-1}} + \frac{M}{\alpha^{h-2}} + \ldots + \frac{M}{\alpha} + M\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n M \left(\frac{1}{\alpha^{h-1}} + \frac{1}{\alpha^{h-2}} + \ldots + \frac{1}{\alpha} + 1\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n M \frac{1-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}{1-\frac{1}{\alpha}} < \frac{MK^n}{1-K}$$

donde hemos llamado $K = \frac{1}{\alpha}$. Como $\alpha > 1$, entonces $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, es decir, $0 < K < 1$, con lo que la sucesión $\{\frac{MK^n}{1-K}\}$ converge a cero, es decir, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, m \in \mathbb{M} \,:\, n \geqslant m \Rightarrow \frac{MK^n}{1-K} < \varepsilon$. Entonces, si $p, q \geqslant m$, tomando $n = p$, $h = q - p$ (si $p < q$, o a la inversa si $p > q$), tenemos $\left|y_p - y_q\right| = |y_{n+h} - y_n| \leqslant \frac{MK^n}{1-K} < \varepsilon$, lo que prueba que $\{y_n\}$ es de Cauchy y, por el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, convergente.

3. Pruébese la siguiente generalización del corolario anterior: sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ de números reales convergente a cero, tal que $|x_{n+h} - x_n| \leqslant y_n \,\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, h \in \mathbb{N}$; entonces $\{x_n\}$ es una sucesión convergente.
   Solución.
   Como la sucesión $\{y_n\}$ converge a cero tenemos: $\forall\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, m \in :\; n \geqslant m \Rightarrow -\varepsilon < y_n < \varepsilon$.
   En particular, sean $p, q \geqslant m$. Entonces $-\varepsilon < y_p < \varepsilon\,;\, -\varepsilon < y_q < \varepsilon$.
   Supongamos que $q > p$. Llamando $h = q - p$, se tiene que $q = p + h$, luego

   $$\left|x_p - x_q\right| = \left|x_p - x_{p+h}\right| \leqslant y_p < \varepsilon$$

   Supongamos que $p > q$. Llamando $h = p - q$, se tiene que $p = q + h$, luego

   $$\left|x_p - x_q\right| = \left|x_{q+h} - x_q\right| \leqslant y_q < \varepsilon$$

   En cualquier caso, $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, m \in :\; p,\, q \geqslant m \Rightarrow \left|x_p - x_q\right| < \varepsilon$. Así pues $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y, por el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, convergente.