Series infinitas de números reales.
Series convergentes

Las sucesiones de números reales se introdujeron con la intención de poder considerar posteriormente sus "sumas"

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

Ya vimos un ejemplo de esta situación en el artículo dedicado a la paradoja de Zenón. Vimos también que se hablaba de "suma infinita" en el sentido de convergencia de una sucesión muy especial: la sucesión de sumas parciales. Vamos a formalizar esta idea.

Definición 1.
Una *serie infinita de números reales* (o simplemente, *serie de números reales*) es un par $(\{a_n\}, \{s_n\})$, donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y $\{s_n\}$ es la sucesión definida por

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

La sucesión $\{a_n\}$ recibe el nombre de *término general* de la serie, mientras que la sucesión $\{s_n\}$ se llama *sucesión de sumas parciales* de la serie. Obsérvese que, según la definición anterior,

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

También usaremos la escritura $\sum a_n$ para designar la serie de números reales de término general $\{a_n\}$.

Ejemplo 1.
La expresión

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

designa la serie infinita de término general $\{\frac{1}{n(n+1)}\}$. La sucesión de sumas parciales es

$$\{s_n\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$$

puesto que para todo número natural k

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Parece natural asignar el número 1 a la "suma" de la serie anterior, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots = 1$$

ya que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge a 1.

Ejemplo 2.
Consideremos ahora la serie infinita

$$\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora tenemos que la sucesión de sumas parciales es

$$\{s_n\} = \left\{\ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n}\right\} = \{\ln(n+1)\}$$

puesto que, usando las propiedades de los logaritmos, para todo número natural k

$$\ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$$

Observemos ahora que la sucesión de sumas parciales, $\{s_n\} = \{\ln(n+1)\}$ no es convergente (no está acotada). Por tanto también será natural decir que la serie anterior no tiene "suma finita" o que no es sumable.

Vamos a expresar con rigor las ideas vistas en los ejemplos anteriores.

Definición 2.
Se dice que la serie de números reales $\sum a_n$ es *convergente* cuando su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente, en cuyo caso el límite de la sucesión de sumas parciales recibe el nombre de *suma de la serie* y se representa por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Así pues, simbólicamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \lim\{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\}$$

La serie del primer ejemplo anterior es convergente de suma 1, y la serie del segundo ejemplo no es convergente. Veamos un par de ejemplos más.

Ejemplo 3.

Dado un número real x, la serie $\sum x^{n-1}$ recibe el nombre de *serie geométrica de razón* x. Si $x = 1$ dicha serie no es convergente, pues la sucesión de sumas parciales es $\{n\}$. Para $x \neq 1$ tenemos

$$\{s_n\} = \{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\} = \left\{ \frac{x^n - 1}{x - 1} \right\}$$

donde hemos utilizado la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

Si $|x| < 1$ tenemos $\{x^n\} \to 0$ y por tanto $\{s_n\} \to \frac{1}{1-x}$. Si $|x| > 1$ tenemos que $\{|x^n|\} \to +\infty$ luego en este caso la serie no es convergente.

Resumiendo, la serie geométrica de razón x, $\sum x^{n-1}$, es convergente si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Ejemplo 4.

En la discusión de la paradoja de Zenón se vio que las sumas parciales s_n de la serie $\sum \frac{1}{n}$ satisfacen la igualdad

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$$

Puesto que $\{\ln(n+1)\} \to +\infty$ lo mismo ocurre con $\{s_n\}$ y por tanto la serie $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente. Esta serie se denomina *serie armónica*.

Hemos de resaltar que estudiar la convergencia de una serie infinita de números reales consiste en estudiar la convergencia de una sucesión de números reales, la sucesión de sumas parciales de la serie. Por otra parte, cualquier sucesión de números reales es la sucesión de sumas parciales de una serie; en efecto, si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de números reales, tomando

$$a_1 = x_1 \ , \ a_{n+1} = x_{n+1} - x_n \ , \forall \, n \in \mathbb{N}$$

es inmediato comprobar por inducción que la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$ es $\{x_n\}$. Resulta por tanto que los conceptos de serie convergente y suma de una serie están en correspondencia biunívoca con los de sucesión de números reales convergente y límite de una tal sucesión. La razón para el estudio específico de las series infinitas de números reales estriba en que, dada una serie $\sum a_n$, a diferencia de lo que ocurría en los ejemplos 1 o 3, la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales se conoce de forma recurrente y no es fácil encontrar una expresión de s_n en función de n que permita estudiar con comodidad la convergencia de la sucesión $\{s_n\}$. Lo que interesa, por tanto, es encontrar criterios de convergencia para series infinitas de números reales $\sum a_n$ que vengan dados en términos de la sucesión $\{a_n\}$ que es perfectamente conocida. A continuación obtenemos de manera inmediata una condición necesaria de este tipo.

Proposición 1.
Sea $\sum a_n$ una serie infinita de números reales convergente. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a cero.

Demostración.
Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie, sucesión que, por hipótesis, es convergente. Entonces resulta que $\{a_{n+1}\} = \{s_{n+1} - s_n\}$ converge a cero y, por tanto, $\{a_n\}$ converge a cero.

El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Los términos generales de las series de los ejemplos 2 y 4, convergen a cero, pero las series no son convergentes. Parece ser pues que, para que una serie sea convergente no sólo debe ocurrir que su término general $\{a_n\}$ converja a cero, sino que lo debe de hacer "lo suficientemente deprisa". Esto es porque para que una serie converja es necesario que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ sea convergente y, por tanto, acotada. Si consideramos una serie convergente de números reales positivos, es decir, $a_n > 0$ para todo n; tenemos que $s_{n+1} = s_n + a_n$ para cada n; de forma que, para que $\{s_n\}$ esté acotada, es necesario que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se hagan pequeños "lo suficientemente deprisa". Así, los términos generales de las series de los ejemplos 2 y 4, respectivamente $\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\} =$ y $\{\frac{1}{n}\}$, no tienden a cero con la suficiente rapidez pues las series correspondientes no son convergentes. Sin embargo el término general de la serie del ejemplo 1, $\{\frac{1}{n(n+1)}\}$, sí que debe de converger a cero lo suficientemente rápido, lo que hace que la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sea convergente.

Presentamos a continuación dos resultados que nos dan propiedades elementales de las series convergentes.

Proposición 2.
Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ dos series de números reales convergentes y α, β dos números reales cualesquiera. Entonces la serie $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Demostración.
Si $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ y $\{u_n\}$ son las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ respectivamente, es evidente que:

$$u_n = \alpha s_n + \beta t_n\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Proposición 3.
Sea $\sum a_n$ una serie de números reales y k un número natural. Entonces la serie $\sum a_n$ es convergente si, y sólo si, la serie $\sum a_{k+n}$ es convergente, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$$

Demostración.
Notando $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ a las sucesiones de sumas parciales de $\sum a_n$ y $\sum a_{k+n}$, para todo natural n, tenemos:

$$s_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+n}) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + t_n$$

La serie $\sum a_{k+n}$ que aparece en la proposición anterior recibe el nombre de *serie de resto k-ésimo* de la serie $\sum a_n$, se la suele notar $\sum_{n>k} a_n$, y en caso de que sea convergente se suele notar $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ a su suma. La proposición anterior nos dice por tanto que una serie es convergente si, y solo si, lo es cualquiera de sus restos, en cuyo caso las sumas de ambas series están relacionadas por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

Conviene observar que los términos a_1, a_2,..., a_k no intervienen para nada en la serie $\sum_{n>k} a_n$; ello permite referirnos a la serie aunque no se conozcan los términos aludidos o, más concretamente, aunque la expresión general de a_n no tenga sentido para $n = 1, 2, \ldots, k$. Así por ejemplo $\sum_{n>1} \frac{1}{\ln n}$ denota inequívocamente a la serie $\sum \frac{1}{\ln(n+1)}$ y para nada nos interesa que la expresión $\frac{1}{\ln n}$ no tenga sentido para $n = 1$. Cualquiera que sea el valor que asignemos al término a_1, la proposición anterior nos dice que $\sum_{n>1} \frac{1}{\ln n}$ es convergente si, y sólo si, lo es $\sum a_n$ siempre que $a_n = \frac{1}{\ln n}, \forall\, n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

En el mismo orden de cosas, se utilizan también con frecuencia series con subíndice inicial cero. Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y a_0 es un número real se denota $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ a la serie $\sum a_{n-1}$ y cuando dicha serie es convergente notamos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a su suma. Puesto que $\sum a_n$ es el primer resto de la serie $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, la proposición anterior nos garantiza que la serie $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ es convergente si, y sólo si, los es $\sum a_n$, en cuyo caso tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Así por ejemplo, la serie geométrica de razón x, $\sum x^{n-1}$, suele denotarse por $\sum_{n\geqslant 0} x^n$, y cuando $|x| < 1$, la serie es convergente y escribiremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Ejercicios.

1. Probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = 1.$

   Solución.

   Si multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión del denominador obtenemos:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

   Entonces la sucesión de sumas parciales viene dada por:

$$\{s_n\} = \left\{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)\right\} =$$

$$= \left\{1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right\} = \left\{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\} \to 1$$

   Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = 1.$

2. Probar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{6^n} = 9.$

   Solución.

   Vamos a estudiar el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$.

$$s_n = \frac{3+2}{1} + \frac{3^2+2^2}{6} + \frac{3^3+2^3}{6^2} + \ldots + \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{6^n} =$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 2\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = (*)$$

   Usando ahora la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica tenemos:

$$(*) = 3\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1} + 2\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}-1} = 3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} =$$

$$= 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Así pues, finalmente

$$\{s_n\} = \left\{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right\} \to 6+3=9$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{6^n}=9$.

3. Probar que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left((n+1)^{\ln n}\right)}=\frac{1}{\ln 2}$.

   Solución.

   Obsérvese en primer lugar que

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left((n+1)^{\ln n}\right)}=\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}$$

   Así pues

$$s_n=\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}\right)+\left(\frac{1}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\ln(n-1)}-\frac{1}{\ln n}\right)+\left(\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$$

   Por tanto

$$\{s_n\}=\left\{\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right\}\to\frac{1}{\ln 2}$$

   y entonces $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left((n+1)^{\ln n}\right)}=\frac{1}{\ln 2}$.

4. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales tales que $\sum(a_n+b_n)$ es convergente. ¿Qué puede afirmarse sobre la convergencia de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$?

   Solución.

   Que, o son las dos convergentes, o ninguna lo es. Para verlo llamemos, respectivamente, $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ y $\{u_n\}$ a las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum(a_n+b_n)$. Entonces es obvio que $\{u_n\}=\{s_n\}+\{t_n\}$. Por hipótesis, $\{u_n\}$ es convergente. Si $\{s_n\}$ fuera convergente debería de serlo $\{t_n\}$ pues $\{t_n\}=\{u_n\}-\{s_n\}$. Este ejercicio es una reformulación del ejercicio 3 del artículo dedicado a las sucesiones acotadas y a las propiedades de las sucesiones convergentes.

5. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de números reales. Supongamos que $\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, n > k \Rightarrow a_n = b_n$. Probar que $\sum a_n$ es convergente si, y solo si, lo es $\sum b_n$, en cuyo caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Solución.

Llamemos, respectivamente, $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ a las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$. Entonces, utilizando la hipótesis según la cual $\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, n > k \Rightarrow a_n = b_n$, tenemos:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + b_{k+1} + \ldots + b_n =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_k - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + b_{k+1} + \ldots + b_n =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} + \ldots + b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + t_n$$

De aquí se deduce claramente que $\sum a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es $\sum a_n$ y, además se cumple la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$