La propiedad de compacidad

En un artículo anterior hemos obtenido dos importantes resultados relacionados con la continuidad de una función en un intervalo: el teorema de los ceros de Bolzano y el teorema del valor intermedio. De hecho, este último afirma que la imagen por una función continua de un intervalo es otro intervalo. Sin embargo el intervalo imagen no tiene por qué ser del mismo tipo que el de partida (podemos ver ejemplos de esto en los ejercicios 4, 5 y 6 del mencionado artículo). No obstante hay un tipo de intervalos que sí se conserva.

Teorema (propiedad de compacidad).
La imagen por una función continua de un intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado.
Demostración.
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Sabemos que $f([a, b])$ es un intervalo.
Empezaremos probando que $f([a, b])$ está acotado. De lo contrario el conjunto $\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ no está mayorado, luego dado un natural n debe existir un punto $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $\{x_n\}$ así construida es acotada, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente. Sea $x = \lim x_{\sigma(n)}$. Por ser $a \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in [a, b]$ y por ser f continua en x la sucesión $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ converge a $f(x)$ y en particular es una sucesión acotada. Ello es una contradicción, pues entonces existe un número real M tal que $|f(x_{\sigma(n)})| \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, de donde para cada natural n se tiene que $n \leqslant \sigma(n) < |f(x_{\sigma(n)})| \leqslant M$. Así pues, $f([a, b])$ es acotado.
Sean $\alpha = \inf f([a, b])$ y $\beta = \sup f([a, b])$. Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos de $f([a, b])$ convergente a β y para cada natural n sea $t_n \in [a, b]$ tal que $f(t_n) = y_n$. Entonces $\{t_n\}$ es una sucesión acotada; sea $\{t_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial convergente a un $t \in [a, b]$. Por ser f continua en t tenemos que $\{f(t_{\sigma(n)})\}$ converge a $f(t)$, pero $\{f(t_{\sigma(n)})\} = \{y_{\sigma(n)}\}$ e $\{y_{\sigma(n)}\}$ converge a β, de donde se deduce que $\beta = f(t) \in f([a, b])$. El mismo razonamiento puede hacerse para probar que $\alpha \in f([a, b])$ (α también es límite de una sucesión de puntos de $f([a, b])$). Por el teorema del valor intermedio tenemos que $[\alpha, \beta] \subset f([a, b])$ pero la inclusión contraria es trivialmente cierta y, por tanto, $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$, lo que demuestra el teorema.

Obsérvese que la hipótesis de que el intervalo de definición de la función, en el teorema anterior, sea cerrado y acotado, es esencial en la demostración; si hubiésemos tenido un intervalo no acotado las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{t_n\}$ que aparecen en la demostración no tendrían por qué ser acotadas, mientras que si hubiéramos tenido un intervalo acotado pero no cerrado los límites x y t de las parciales convergentes extraídas no tendrían por qué pertenecer al intervalo.

Vamos a introducir ahora alguna terminología que nos permita enunciar el teorema anterior de manera más sugerente.

Definición.
Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f está acotada (respectivamente mayorada, minorada) si su imagen $f(A) = \{f(x) \, : \, x \in A\}$ es un conjunto acotado (respectivamente mayorado, minorado) de números reales. Así pues, simbólicamente:

- f está mayorada $\Leftrightarrow \exists \, K \in \mathbb{R} \, : \, K \geqslant f(x), \, \forall x \in A$.
- f está minorada $\Leftrightarrow \exists \, k \in \mathbb{R} \, : \, k \leqslant f(x), \, \forall x \in A$.
- f está acotada $\Leftrightarrow \exists \, M \in \mathbb{R}^+ \, : \, M \geqslant |f(x)|, \, \forall x \in A$.

Esta definición extiende a la que en su momento se dio para sucesiones de números reales.

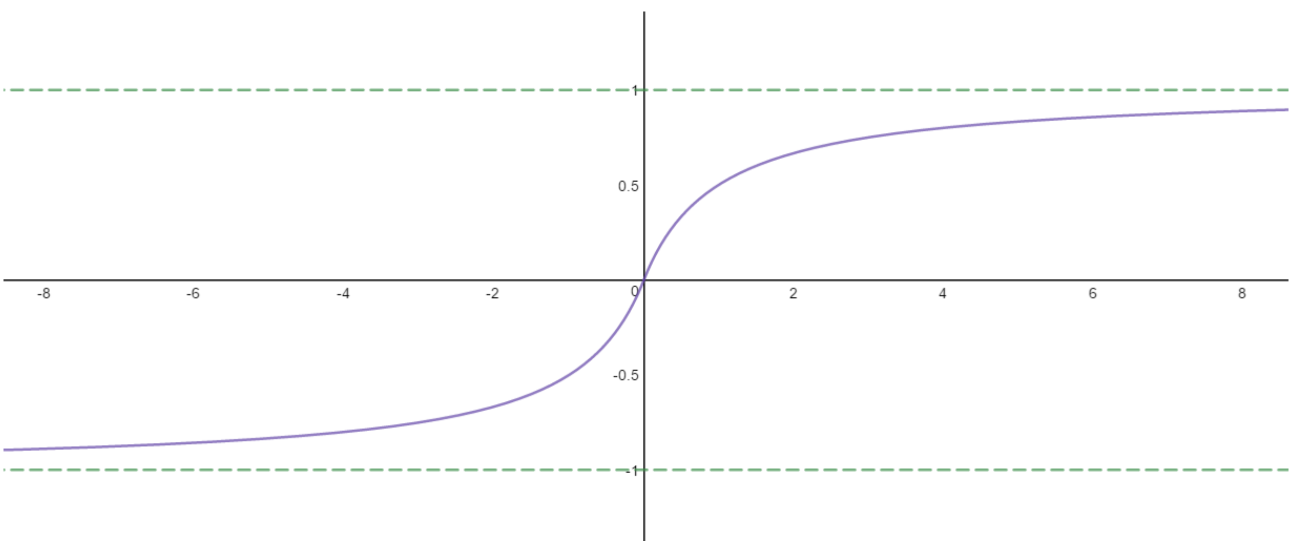
Diremos que $f : A \to \mathbb{R}$ tiene *máximo* (respectivamente *mínimo*) si su imagen $f(A)$ tiene máximo (respectivamente mínimo). Si $x_0 \in A$ es tal que $f(x_0) = \text{máx} \, f(A)$ (respectivamente $f(x_0) = \text{mín} \, f(A)$), diremos que f alcanza su máximo (respectivamente mínimo) absoluto en el punto x_0. Es conveniente observar que una función puede alcanzar su máximo o su mínimo en más de un punto, lo cual no significa naturalmente que $f(A)$ tenga más de un máximo o más de un mínimo. Debe distinguirse claramente el punto x_0 donde se alcanza el máximo o el mínimo absoluto de una función del máximo o mínimo absoluto alcanzado, $f(x_0)$.

Con la terminología anterior, la propiedad de compacidad puede enunciarse diciendo que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada y tiene máximo y mínimo absolutos (el hecho de que la imagen sea un intervalo viene ya obligado por el teorema del valor intermedio). Enunciado el teorema en la forma anterior, cabe volver a analizar la demostración para ver como juega la hipótesis de que el conjunto de definición sea un intervalo cerrado y acotado. Lo que realmente se utiliza de $[a, b]$ para probar que f está acotada y tiene máximo y mínimo absolutos es que toda sucesión de puntos de $[a, b]$ admita una parcial convergente a un punto de $[a, b]$. Se puede comprobar sin dificultad que los únicos intervalos con esta propiedad son los cerrados y acotados, pero existen conjuntos no vacíos de números reales que no son intervalos y que cumplen la propiedad anterior, como por ejemplo los conjuntos finitos o el conjunto $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Proponemos a continuación cuatro ejercicios relacionados con la propiedad de compacidad (con sus respectivas soluciones).

1. Sean $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$, $\forall\, x \in (0,1)$; $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.
   Comprobar que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.
   Solución.
   f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica y, por el carácter local de la continuidad, también lo es en el intervalo $(0,1)$. La imagen de la función f vuelve a ser el intervalo $(0,1)$ (f es la función identidad) que no tiene ni máximo ni mínimo, luego f no tiene máximo ni mínimo absolutos.

   Usando el carácter local de la continuidad g es claramente continua en $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^-$ pues las respectivas restricciones de g a $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ son funciones racionales, luego continuas. En $x_0 = 0$ también es continua pues si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales convergente a 0, la sucesión $\{g(x_n)\}$ converge a $g(0) = 0$ (basta observar para ello que $\{g(x_n)\}$ es de la forma $\left\{\frac{x_n}{1+x_n}\right\}$ o $\left\{\frac{x_n}{1-x_n}\right\}$ que claramente convergen a cero pues $\{x_n\} \to 0$). Así pues g es continua.

   Dado $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene $0 \leqslant x < 1 + x \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$. Ahora bien, dado $x \in \mathbb{R}^-$, $-x \in \mathbb{R}^+$ y entonces por los visto anteriormente $0 < \frac{-x}{1-x} < 1 \Leftrightarrow 0 > \frac{x}{1-x} > -1$, o lo que es lo mismo, $-1 < \frac{x}{1-x} < 0$. Esto demuestra que la imagen de la función g es el intervalo $(-1,1)$, que no tiene máximo ni mínimo. Por tanto g no tiene ni máximo ni mínimo absolutos (véase la representación gráfica de la función en la figura anterior).

2. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en 0, entonces existe un número real y positivo δ tal que la restricción de f al intervalo $[-\delta, \delta]$ está acotada.
   Solución.
   Al ser f es continua en 0 se tiene que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta' > 0 \,:\, |x| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

   Tomando $\varepsilon = 1$ tenemos entonces que

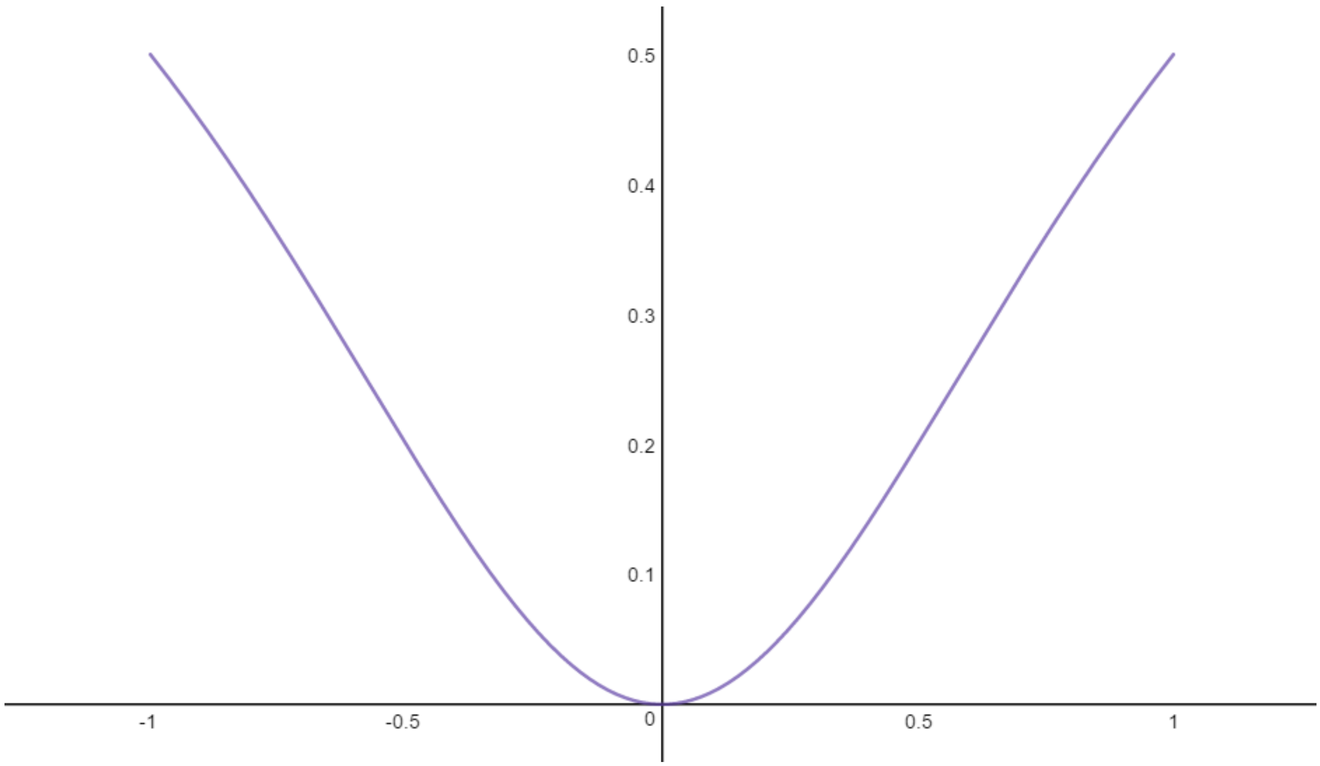
$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |f(0)| + 1$$

   Esto demuestra que f está acotada en $(-\delta', \delta')$. Tomando $\delta = \frac{\delta'}{2}$, tenemos que f está acotada en $[-\delta, \delta]$.

3. Sea I un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de I tal que $f(x_n) = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pruébese que $0 \in f(I)$. Muéstrese con ejemplos que la hipótesis de que el intervalo I sea cerrado y acotado no puede suprimirse.
   Solución.
   Por ser I cerrado y acotado y f continua en I, $f(I)$ es un intervalo cerrado y acotado: $[\alpha, \beta]$. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0 y como $\alpha \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \beta$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $0 \in [\alpha, \beta] = f(I)$.

   Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, $\forall\, x \in [0, 1]$. Sea $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. Entonces tenemos que $\{f(x_n)\} = \{f(\frac{1}{n})\} = \{\frac{1}{n}\}$. La imagen de la función f, por ser ésta la identidad, es el intervalo $(0, 1]$ al cual, obviamente, no pertenece el cero. Así se muestra que la hipótesis de que el intervalo I sea cerrado y acotado efectivamente no puede suprimirse.

4. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$. Determínese la imagen de f.
   Solución.
   La imagen de f es un intervalo cerrado y acotado. Sea éste $[\alpha, \beta]$. Como $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0$, $\forall\, x \in [-1, 1]$ y $f(0) = 0$ entonces $\alpha = 0$ (f tiene en 0 un mínimo absoluto y éste toma el valor 0). Supongamos que $\exists\, x \in [-1, 1]$ tal que $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} > \frac{1}{2}$. Entonces $1 + x^2 < 2x^2 \Leftrightarrow 1 < x^2$, pero esto es absurdo pues $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Así pues $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $\forall\, x \in [-1, 1]$. Como $f(1) = \frac{1}{2}$, entonces $\beta = 1$ (f tiene en 1 un máximo absoluto y éste toma el valor $\frac{1}{2}$). De esta forma la imagen de f es el intervalo $[0.\frac{1}{2}]$ (ver a continuación la representación gráfica de la función f).


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-1
-0.5
0
0.5
1