1. Coordenadas o componentes de un vector

Sean dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ del espacio. Entonces las **coordenadas o componentes** del vector $\overrightarrow{AB}$ son: $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\, b_2-a_2,\, b_3-a_3)$. Dos vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ son **equivalentes** ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$) si tienen las mismas coordenadas o componentes. Al conjunto de todos los vectores con las mismas coordenadas lo llamaremos **vector libre** y lo denotaremos genéricamente mediante $\vec{u}$. El **vector nulo** es aquel que tiene coordenadas $(0,0,0)$. Si $\vec{u}$ tiene coordenadas (u_1, u_2, u_3), entonces el **vector opuesto**, $-\vec{u}$, tiene coordenadas $(-u_1, -u_2, -u_3)$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores con coordenadas (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3), respectivamente, entonces el **vector suma** $\vec{u}+\vec{v}$ tiene coordenadas $(u_1+v_1,\, u_2+v_2,\, u_3+v_3)$ y dado un número $\lambda\in\mathbb{R}$ el **producto de un número por el vector** $\vec{u}$, $\lambda\vec{u}$ tiene coordenadas $(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

2. División de un segmento en n partes iguales

Sea un segmento de extremos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$

- ✓ Coordenadas de un punto C que dividen al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales:
$$C=\left(a_1+\frac{1}{2}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{1}{2}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{1}{2}(b_3-a_3)\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$
- ✓ Coordenadas de dos puntos C y D que dividen al segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales:
$$C=\left(a_1+\frac{1}{3}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{1}{3}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{1}{3}(b_3-a_3)\right)$$
$$D=\left(a_1+\frac{2}{3}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{2}{3}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{2}{3}(b_3-a_3)\right)$$
- ✓ Coordenadas de tres puntos C, D y E que dividen al segmento $\overline{AB}$ en cuatro partes iguales:
$$C=\left(a_1+\frac{1}{4}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{1}{4}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{1}{4}(b_3-a_3)\right)$$
$$D=\left(a_1+\frac{2}{4}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{2}{4}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{2}{4}(b_3-a_3)\right)$$
$$E=\left(a_1+\frac{3}{4}(b_1-a_1),\, a_2+\frac{3}{4}(b_2-a_2),\, a_3+\frac{3}{4}(b_3-a_3)\right)$$
- ✓ Y así sucesivamente para dividir un segmento en n partes iguales.

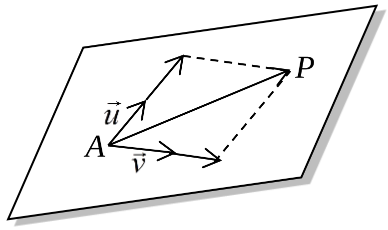
3. Vector director de una recta y ecuaciones de la recta

Dada una recta r se llama **vector director** de la recta r a un vector libre $\vec{u}$ que tenga la dirección de la recta r. Supongamos que de una recta r conocemos un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y un vector director $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$. Supongamos también que $P(x,y,z)$ es un punto cualquiera de dicha recta. Entonces:

- ✓ **Ecuación vectorial de la recta:** $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{u}\Rightarrow(x-a_1,\, y-a_2,\, z-a_3)=\lambda(u_1, u_2, u_3)$ **(1)**
- ✓ **Ecuaciones paramétricas de la recta:** de **(1)** se deduce que $\begin{cases} x-a_1=\lambda u_1 \\ y-a_2=\lambda u_2 \\ z-a_3=\lambda u_3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1 \\ y=a_2+\lambda u_2 \\ z=a_3+\lambda u_3 \end{cases}$ **(2)**
- ✓ **Ecuaciones continuas de la recta:** eliminando el parámetro de **(2)** tenemos que $\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$

  Nota: *si alguna de las coordenadas del vector es nula, también podremos escribir las ecuaciones continuas de la recta. Entonces aparecerá un cero en algún denominador. Aunque aparentemente esto no tenga sentido, lo interpretaremos no como un cociente, sino como una proporcionalidad, en la que el producto de medios es igual al producto de extremos. Ello supone que el numerador correspondiente se anula.*
- ✓ **Ecuación de una recta conociendo dos puntos:** si conocemos dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)\Rightarrow$ $\Rightarrow\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\, b_2-a_2,\, b_3-a_3)$, y entonces la ecuación es $\dfrac{x-a_1}{b_1-a_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2-a_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3-a_3}$

4. Ecuaciones de un plano



Un plano π queda definido si conocemos un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ perteneciente a él y dos vectores $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ de dirección diferente contenidos en él. Tomando un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ deberá ser combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, deberán existir unos escalares λ y μ tales que:

- ✓ **Ecuación vectorial del plano:** $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Rightarrow (x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3)=\lambda(u_1, u_2, u_3)+\mu(v_1, v_2, v_3)$ **(3)**
- ✓ **Ecuaciones paramétricas del plano:** de **(3)** $\begin{cases} x-a_1=\lambda u_1+\mu v_1 \\ y-a_2=\lambda u_2+\mu v_2 \\ z-a_3=\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$ **(4)**
- ✓ **Ecuación implícita, general o cartesiana de un plano:** considerando **(4)** como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas (λ y μ), debe ocurrir, para que haya soluciones y así el plano tenga sentido, que el rango de las matrices $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$ (matriz de los coeficientes) y $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{pmatrix}$ (matriz ampliada) sea el mismo (rango 2 pues $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ son linealmente independientes). Entonces el determinante de la matriz ampliada deber ser igual a cero: $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{vmatrix}=0$. Este determinante también se puede escribir así: $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$ **(5)**. Desarrollando este determinante se obtiene la ***ecuación implícita, general o cartesiana del plano***: $Ax+By+Cz+D=0$
- ✓ **Ecuación de un plano conociendo tres puntos:** dados tres puntos no alineados $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ $\Rightarrow$ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(c_1-a_1, c_2-a_2, c_3-a_3)$. Entonces por **(5)** $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0$, determinante que vale lo mismo que este otro de cuarto orden: $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 & 0 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 & 0 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ y sumando la cuarta fila a las otras tres tenemos la ***ecuación del plano que pasa por*** A***,*** B ***y*** C expresada por medio de un determinante: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

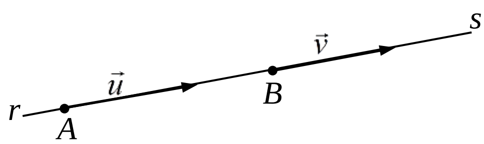
5. Posiciones relativas de dos rectas

Sea r determinada por $A(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ y s determinada por $B(b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$.

- ✓ **Coincidentes: tienen todos sus puntos comunes**
- ✓ **Paralelas: no tienen ningún punto en común, y además existe un plano que contiene a ambas rectas.**
- ✓ **Secantes: tienen un punto en común.**
- ✓ **Se cruzan**: no tienen ningún punto en común y no existe ningún plano que contenga a ambas rectas.

5.1. Rectas coincidentes

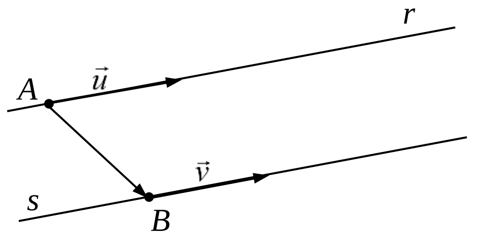
En este caso $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección. Además el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que los anteriores. Por tanto, la condición para que dos rectas sean coincidentes es:



$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{pmatrix} = 1$$

5.2. Rectas paralelas

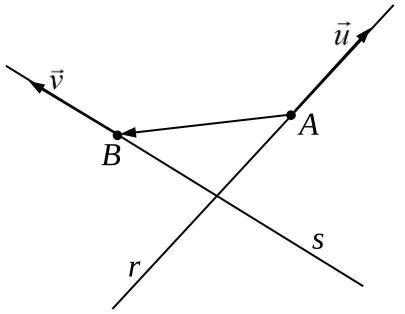
En este caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ también tienen la misma dirección. Pero la dirección de $\overrightarrow{AB}$ es distinta de la de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así pues, la condición para que dos rectas sean paralelas es:



$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 1 \ ; \ \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{pmatrix} = 2$$

5.3. Rectas secantes

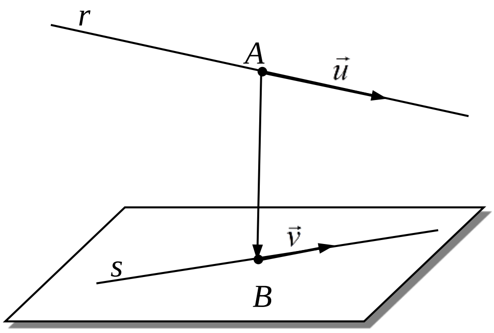
En este caso los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección. Además, el vector $\overrightarrow{AB}$ está contenido en el plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Entonces, la condición para que dos rectas sean secantes es:



$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{pmatrix} = 2$$

5.4. Rectas que se cruzan

En este caso las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son distintas, pero el vector $\overrightarrow{AB}$ no está contenido en el plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (no puede pues obtenerse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$). Así pues, la condición para que dos rectas se crucen es:



$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \ ; \ \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \end{pmatrix} = 3$$

6. Posiciones relativas de una recta y un plano

Escribamos la recta en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$ y el plano en forma implícita: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$.

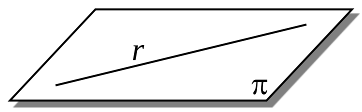
Si un punto de la recta pertenece también al plano, entonces, al sustituir sus coordenadas en la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$, ésta debe satisfacerse: $A(a_1 + \lambda u_1) + B(a_2 + \lambda u_2) + C(a_3 + \lambda u_3) + D = 0$, es decir:

$$\begin{cases} (Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D) + \lambda(Au_1 + Bu_2 + Cu_3) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = \dfrac{-(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D)}{(Au_1 + Bu_2 + Cu_3)} \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Los valores de λ que cumplen esta ecuación determinan los puntos de la recta que pertenecen también al plano.

- ✓ **Recta contenida en el plano:** si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.
- ✓ **Recta y plano paralelos:** si no tienen ningún punto en común.
- ✓ **Recta y plano secantes:** si tienen un punto en común.

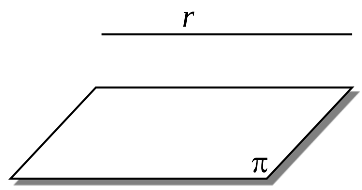
6.1. Recta contenida en el plano



En este caso todos los puntos de la recta pertenecen también al plano, lo cual significa que todo valor λ es solución de la anterior ecuación **(6)**. Para que esto sea posible ha de ser:

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0 \ ; \ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$$

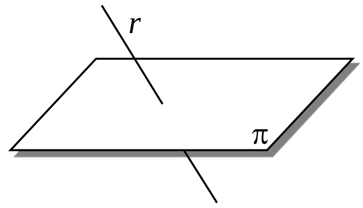
6.2. Recta y plano paralelos



En este caso ningún punto de la recta pertenece al plano, lo cual significa que no hay ningún valor de λ que sea solución de la ecuación **(6)**. Para que esto ocurra ha de ser:

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0 \ ; \ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0$$

6.3. Recta y plano secantes



En este caso un único punto de la recta pertenece al plano, lo cual significa que hay un único valor de λ que es solución de la anterior ecuación **(6)**. Para que esto ocurra ha de ser:

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 \neq 0$$

7. Posiciones relativas de dos planos

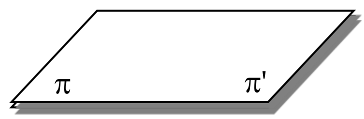
Dos planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ en el espacio pueden adoptar una de las siguientes posiciones relativas:

- ✓ **Planos coincidentes:** son los que tienen todos sus puntos comunes.
- ✓ **Planos paralelos:** son los que no tienen ningún punto en común.
- ✓ **Planos secantes:** son los que tienen una recta común.

Los puntos pertenecientes a ambos planos son las soluciones del sistema $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ **(7)**, luego la posición relativa vendrá determinada por el carácter del mencionado sistema y por tanto de los rangos respectivos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

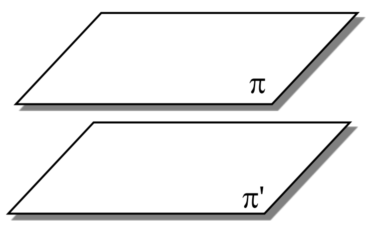
7.1. Planos coincidentes

En este caso las ecuaciones del sistema **(7)** deben ser equivalentes (proporcionales) y los rangos de ambas matrices son iguales a 1: $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1$



Obsérvese que esta condición es equivalente a esta otra: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$

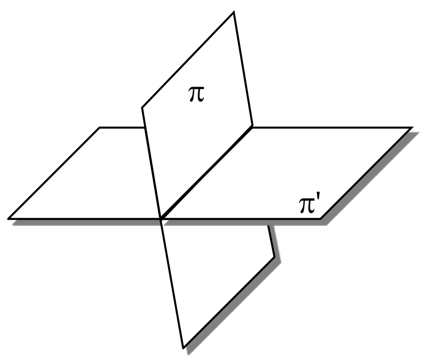
7.2. Planos paralelos



Si el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada es 2, es sistema **(7)** es incompatible y los planos serán paralelos: $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1 \ ; \ \text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2$

Condición que es equivalente a esta otra: $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$

7.3. Planos secantes



En este caso basta con que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual a 2: $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$

La recta solución vendrá dada por las infinitas soluciones del sistema **(7)**.

8. Ecuaciones implícitas de una recta

Según se ha visto en el apartado anterior, dos planos secantes se cortan en una recta. Por tanto, el conjunto de las dos ecuaciones del sistema **(7)** pueden considerarse como las ecuaciones de una recta. Llamaremos a éstas **ecuaciones implícitas** de la recta: $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

8.1. Paso de ecuaciones continuas a forma implícita

Si tenemos una recta en forma continua $\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}$, para pasar a forma implícita basta multiplicar en cruz las dos igualdades: $\begin{cases} u_2(x-a_1)=u_1(y-a_2) \\ u_3(y-a_2)=u_2(z-a_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2x-u_1y+(u_1a_2-u_2a_1)=0 \\ u_3y-u_2z+(u_2a_3-u_3a_2)=0 \end{cases}$

8.2. Paso de forma implícita a continua

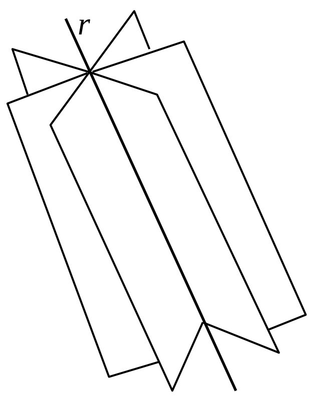
Se procede resolviendo el sistema formado por las ecuaciones implícitas: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$. Veámoslo con un ejemplo:

Sea la recta $\begin{cases} 3x-y-2x-6=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$. Llamamos $z=\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=2\lambda+6 \\ x+y=-\lambda+2 \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones se obtiene $4x=\lambda+8 \Rightarrow x=\frac{\lambda}{4}+2$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $\frac{\lambda}{4}+2+y=-\lambda+2 \Rightarrow y=-\lambda-\frac{\lambda}{4} \Rightarrow y=-\frac{5\lambda}{4}$. Por tanto las soluciones son $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\lambda}{4}+2,\ -\frac{5\lambda}{4},\ \lambda\right)$, y de aquí podemos escribir la recta en forma su vectorial; $(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 0)+\left(\frac{\lambda}{4},\ -\frac{5\lambda}{4},\ \lambda\right)=(2,\ 0,\ 0)+\lambda\left(\frac{1}{4},\ -\frac{5}{4},\ 1\right)$, de donde se deduce que un punto de la recta es $A(2,0,0)$ y un vector director es $\vec{v}=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{5}{4},\ 1\right)$, con lo que también lo será uno proporcional a éste: $\vec{u}=(1,-5,4)$ (multiplicamos por el denominador común, con lo que prescindimos de fracciones en la ecuación continua). Así pues la ecuación continua es: $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$

9. Haz de planos

Dada una recta r en el espacio, el conjunto de planos que pasan por ella se llama haz de planos de arista r. Si la recta está dada en forma implícita $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$, el haz de planos se obtiene al dar a λ y μ todos los valores posibles, excepto $\lambda=0$ y $\mu=0$ simultáneamente, en la expresión:

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0$$



El empleo del haz de planos facilita la resolución de algunos problemas. Por ejemplo:

- ✓ Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y pasa por el punto $(3,-2,6)$.

  El plano π buscado será de la forma: $\lambda(x-y+1)+\mu(2x-z)=0$. Si pasa por el punto $(3,-2,6)$ estas coordenadas deben satisfacer la ecuación del plano, luego: $\lambda(3+2+1)+\mu(6+6)=0 \Rightarrow 6\lambda+12\mu=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda+2\mu=0$. Busquemos unos valores de λ y μ que cumplan esta última expresión, por ejemplo, $\lambda=2$ y $\mu=-1$. Por lo tanto, el plano buscado será $2(x-y+1)-1(2x-z)=0 \Rightarrow \pi \equiv -2y+z+2=0$.

10. Producto escalar de dos vectores

Dado un vector libre $\vec{u}$ del espacio, se llama **módulo** de $\vec{u}$ a su longitud, y lo representaremos por $|\vec{u}|$. Se llama **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se representa $\vec{u}\cdot\vec{v}$ a la expresión: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\alpha$, donde α es el menor ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

10.1. Propiedades del producto escalar

a) **Conmutativa:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
b) **Distributiva respecto de la suma:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
c) **Asociativa mixta:** $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$. donde $k\in\mathbb{R}$
d) Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero: $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
e) Si el producto escalar de dos vectores es cero, y los vectores son ambos no nulos, entonces los vectores son perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; $\vec{u},\vec{v}\neq 0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$
f) Si las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son, respectivamente, (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3), entonces el producto escalar se puede expresar de la siguiente manera: $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

10.2. Expresión del módulo de un vector utilizando el producto escalar

El módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva del producto escalar de dicho vector por sí mismo:

$$|\vec{u}|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Utilizando f) y la expresión anterior:

$$|\vec{u}|=+\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}$$

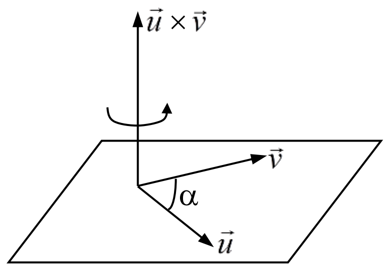
Se llama **vector unitario o normal** a aquel cuyo módulo vale 1. **Normalizar** un vector $\vec{u}$ es encontrar un vector $\vec{u}$ unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{u}$. Para obtener $\vec{v}$, basta multiplicar $\vec{u}$ por el inverso de su módulo: $\vec{v}=\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

11. Producto vectorial de dos vectores

Dados dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se llama **producto vectorial** de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ al <u>vector</u> que:

- ✓ Tiene por módulo $|\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\alpha$, donde α es el menor ángulo formado por los vectores.
- ✓ Tiene la dirección de la perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- ✓ Tiene el sentido de girar desde $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ (regla del sacacorchos).

El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se representa así: $\vec{u}\times\vec{v}$.



11.1. Propiedades del producto vectorial

a) **Anticonmutativa:** $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
b) **Distributiva respecto a la suma:** $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
c) **Asociativa mixta:** $k(\vec{u}\times\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(k\vec{v})$ donde $k\in\mathbb{R}$
d) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$
e) Si las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son, respectivamente, (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3), entonces el producto vectorial se obtiene al desarrollar la primera fila del determinante: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$, donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son, respectivamente los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. El conjunto $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ es un **sistema de referencia ortonormal** (conjunto de tres vectores de módulo uno perpendiculares dos a dos). Por tanto $\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

12. Producto mixto de tres vectores

Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se llama **producto mixto** de dichos vectores al número obtenido así:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

El producto mixto se denota así $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Si las coordenadas de los vectores son $\vec{u}=(u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\vec{v}=(v_1,\, v_2,\, v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,\, w_2,\, w_3)$, entonces el producto mixto es el valor del determinante:

$$(\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

13. Ángulo de dos vectores

El coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(u_1,\, u_2,\, u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,\, v_2,\, v_3)$ es:

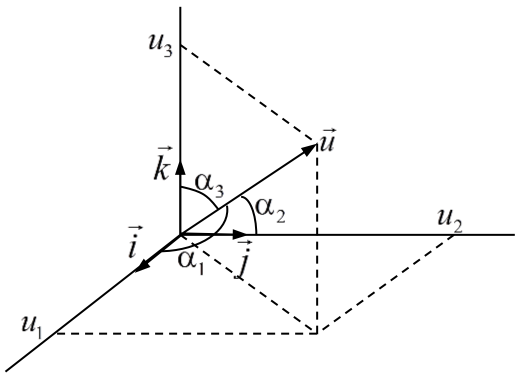
$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

Se toma como ángulo α el menor de los formados por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

13.1. Cosenos directores de un vector

Dado un vector $\vec{u}=(u_1,\, u_2,\, u_3)$ se llaman cosenos directores de este vector a los cosenos de los ángulos que forma este vector con los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Llamemos a estos ángulos, respectivamente, α_1, α_2 y α_3. Entonces, como las coordenadas de $\vec{i}$ son $(1,0,0)$, se tiene: $\cos\alpha_1=\dfrac{\vec{i}\cdot\vec{u}}{|\vec{i}|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{1u_1+0v_2+0v_3}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos\alpha_1=\frac{u_1}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}.$$



Análogamente tenemos: $\cos\alpha_2=\dfrac{u_2}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}$, $\cos\alpha_3=\dfrac{u_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}$. Obsérvese pues que los cosenos directores coinciden con las coordenadas del vector $\vec{v}$ normalizado de $\vec{u}$:

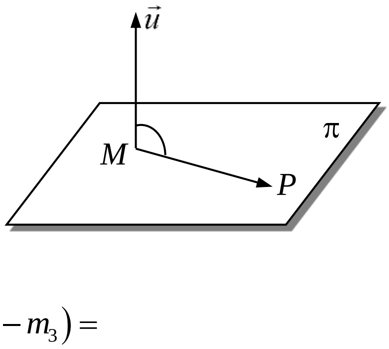
$$\vec{v}=\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}(u_1,\,u_2,\,u_3)=\left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}},\,\frac{u_2}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}},\,\frac{u_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}\right)=$$

$=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3)$. Obsérvese también que $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$

14. Vector perpendicular a un plano

Un vector libre $\vec{u}$ es perpendicular a un plano π cuando $\vec{u}$ es perpendicular a cualquier vector contenido en π.

Dado el plano π de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$, se tiene que $\vec{u}=(A,\,B,\,C)$ son las coordenadas de un vector perpendicular al plano: $\vec{u}=(A,\,B,\,C)\perp\pi$.



La comprobación es fácil: se toman dos puntos $M(m_1,\,m_2,\,m_3)$ y $P(p_1,\,p_2,\,p_3)$ del plano π. Entonces:

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{MP}=(A,\,B,\,C)\cdot(p_1-m_1,\,p_2-m_2,\,p_3-m_3)=A(p_1-m_1)+B(p_2-m_2)+C(p_3-m_3)=$$

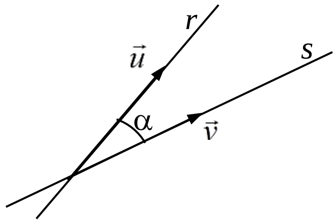
$=(Ap_1+Bp_2+Cp_3)-(Am_1+Bm_2+Cm_3)=-D-(-D)=0$, pues $M,P\in\pi$. Como $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MP}=0\Rightarrow\vec{u}\perp\pi$.

15. Ángulo de dos rectas

El ángulo α formado por dos rectas r y s es el mismo que el que forman sus vectores directores. Supongamos que éstos son, respectivamente, $\vec{u}=(u_1,\,u_2,\,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,\,v_2,\,v_3)$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha=\dfrac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$.

Es posible que este valor salga positivo o negativo. En el primer caso el ángulo obtenido es agudo, y en el segundo es obtuso. Si queremos que el ángulo sea siempre agudo, entonces escribiremos:

$$\cos\alpha=\frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$



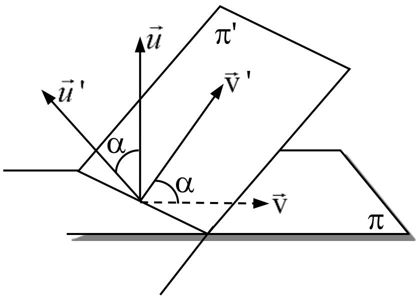
En particular, dos rectas serán perpendiculares cuando $\cos\alpha=0$, es decir, cuando $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$:

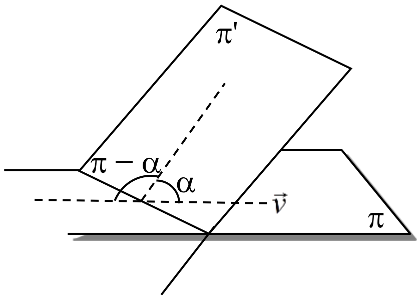
$$r\perp s\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$$

16. Ángulo de dos planos

Dados dos planos π y π', el ángulo formado por ambos es el que forman dos vectores contenidos en cada uno de los planos respectivos que sean perpendiculares a la recta intersección de los dos planos, es decir, el ángulo de los dos planos es el formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ de la figura.

Si $\vec{u}$ y $\vec{u}\,'$ son dos vectores perpendiculares a cada uno de los planos respectivos, podemos observar que el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{u}\,'$ es el mismo que el de $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$.





Por lo tanto, si las ecuaciones de ambos planos son $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$, entonces los vectores $\vec{u}=(A,B,C)$ y $\vec{u}\,'=(A',B',C')$' son perpendiculares a los planos respectivos, luego:

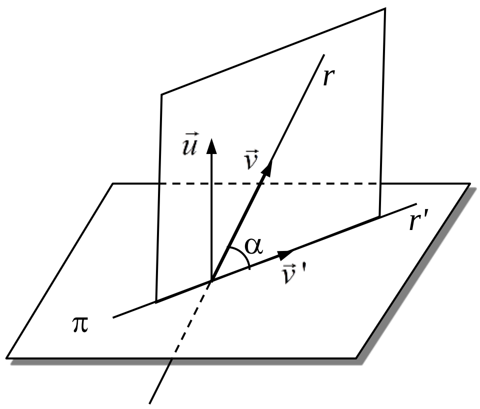
$\cos\alpha=\dfrac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$ (obsérvese que tomamos valor absoluto para obtener el ángulo agudo).

En particular dos planos serán perpendiculares cuando $\cos\alpha=0$, es decir, cuando $AA'+BB'+CC'=0$:

$$\pi\perp\pi'\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{u}\,'\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}\,'=0\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$$

17. Ángulo de recta y plano

Dada una recta r y un plano π, el ángulo formado por ambos es aquel que forman r y r', donde r' es la proyección ortogonal de r sobre π. La recta r' se obtiene como intersección de π con el plano que contiene a la recta r y es perpendicular a π. Si $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$ son vectores directores de r y r', el ángulo formado por r y π es el que forman $\vec{v}$ y $\vec{v}\,'$. Si $\vec{u}$ es un vector perpendicular a π, ese ángulo es complementario del formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por lo tanto, si las ecuaciones continuas de la recta son $r\equiv\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$, y la ecuación general o implícita del plano es $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, tenemos que $\operatorname{sen}\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$, luego:



$$sen\,\alpha=\frac{|Av_1+Bv_2+Cv_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}}$$

18. Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ en el espacio, su distancia, d(A, B), es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Por lo tanto:

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = +\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

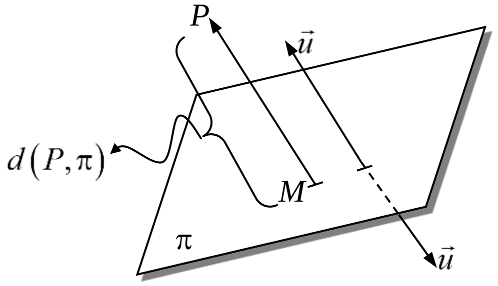
19. Ecuación normal de un plano

Ya sabemos que dado un plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, el vector $\vec{u} = (A, B, C)$ es perpendicular al plano. Si además este vector es unitario (de módulo 1), decimos que la anterior ecuación es la **ecuación normal del plano**. Para pasar de la forma implícita a la forma normal basta que normalicemos el vector $\vec{u} = (A, B, C)$. Para ello dividimos entre su módulo: $\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$, que son precisamente los cosenos directores del vector $\vec{u}$ (véase el apartado 13.1). Así pues la ecuación normal del plano es: $(\cos\alpha_1)x + (\cos\alpha_2)y + (\cos\alpha_3)z + p = 0$, donde $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ son los cosenos directores de un vector perpendicular al plano y $p = \dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (veremos en el apartado siguiente que esta cantidad representa en valor absoluto la distancia del origen de coordenadas al plano)

20. Distancia de un punto a un plano

Dados un punto P y un plano π, se llama distancia de P a π, $d(P, \pi)$, a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de π con la recta que pasa por P y es perpendicular a π. Si el punto P tiene coordenadas (p_1, p_2, p_3) y el plano π tiene ecuación implícita $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia de P a π es igual a:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Demostración:

Supongamos $M(m_1, m_2, m_3)$, $\overrightarrow{MP} = (p_1 - m_1, p_2 - m_2, p_3 - m_3)$ y $\vec{u} = (A, B, C)$ el vector perpendicular al plano. Obviamente $d(P, \pi) = \left|\overrightarrow{MP}\right|$. Pero, por un lado, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MP} = A(p_1 - m_1) + B(p_2 - m_2) + C(p_3 - m_3)$ y, por otro, $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MP} = |\vec{u}|\left|\overrightarrow{MP}\right|\cos\alpha = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\left|\overrightarrow{MP}\right|(\pm 1)$ (el ángulo α que forman $\vec{u}$ y $\overrightarrow{MP}$ es 0º ó 180º).

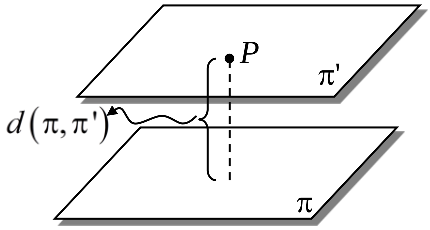
Entonces, igualando ambas expresiones: $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\left|\overrightarrow{MP}\right| = A(p_1 - m_1) + B(p_2 - m_2) + C(p_3 - m_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \pm\dfrac{A(p_1 - m_1) + B(p_2 - m_2) + C(p_3 - m_3)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\dfrac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 - (Am_1 + Bm_2 + Cm_3)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Pero $M \in \pi$, por lo que $Am_1 + Bm_2 + Cm_3 + D = 0 \Rightarrow Am_1 + Bm_2 + Cm_3 = -D \Rightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right| = \pm\dfrac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

y como la distancia es siempre un número no negativo, entonces $\left|\overrightarrow{MP}\right| = d(P, \pi) = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

21. Distancia entre dos planos paralelos

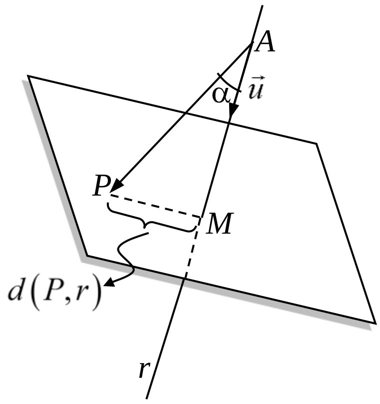


Dados dos planos paralelos π y π', se define la distancia entre ambos, $d(\pi,\pi')$, como la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro. Supongamos que los dos planos tienen ecuaciones implícitas $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$. Entonces, por ser paralelos, podemos simplificar una de las dos ecuaciones, por ejemplo la de π', por un número adecuado y obtendremos una ecuación del tipo $\pi' \equiv Ax+By+Cz+D''=0$. Si tomamos un punto $P(p_1,\ p_2,\ p_3)\in\pi'$, entonces la distancia entre los planos es $d(\pi,\ \pi')=\dfrac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (ver apartado anterior) y como $P\in\pi'$, se cumple $Ap_1+Bp_2+Cp_3+D''=0$, es decir, $Ap_1+Bp_2+Cp_3=-D''$, y queda definitivamente: $d(\pi,\ \pi')=\dfrac{|D-D''|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

22. Distancia de un punto a una recta

Dados un punto P y una recta r, se llama distancia de P a r, $d(P,r)$, a la distancia de P a M, donde M es el punto de intersección de r con el plano que pasa por P y es perpendicular a r. Si $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$ y la recta r tiene ecuaciones continuas $r\equiv\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$, entonces la distancia de P a r vale:

$$d(P,\ r)=\frac{|(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)\times(u_1,\ u_2,\ u_3)|}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}}$$



Demostración:

Supongamos $M(m_1,\ m_2,\ m_3)$, $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ el vector director de la recta y $\overrightarrow{AP}$ el vector que une un punto cualquiera A de la recta con el punto P: $\overrightarrow{AP}=(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)$. Hagamos el producto vectorial de ambos vectores y hallemos su módulo: $|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}|=|\overrightarrow{AP}||\vec{u}|\operatorname{sen}\alpha$. En la figura se observa que la distancia buscada es $d(P,r)=|\overrightarrow{AP}|\,sen\,\alpha$, y sustituyendo en la expresión anterior tenemos $|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}|=d(P,r)|\vec{u}|$, luego

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(p_1-a_1,\ p_2-a_2,\ p_3-a_3)\times(u_1,\ u_2,\ u_3)|}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}}$$

23. Distancia entre una recta y un plano paralelos

Se define esta distancia como la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Así si la recta tiene ecuaciones continuas $r\equiv\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$ y el plano tiene ecuación implícita $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, entonces aplicando la fórmula de la distancia de un punto a un plano tenemos: $d(r,\ \pi)=\dfrac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

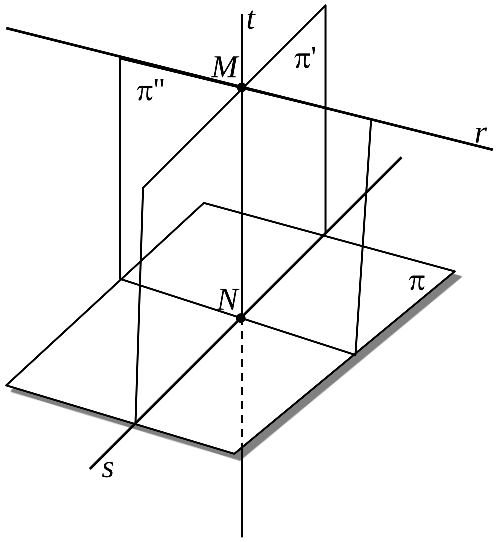
24. Distancia entre dos rectas paralelas

Se define esta distancia como la distancia de un punto de cualquiera de una recta a la otra. Así, si las rectas tienen ecuaciones continuas: $r\equiv\dfrac{x-a_1}{u_1}=\dfrac{y-a_2}{u_2}=\dfrac{z-a_3}{u_3}$ y $s\equiv\dfrac{x-b_1}{u_1}=\dfrac{y-b_2}{u_2}=\dfrac{z-b_3}{u_3}$ (obsérvese que, por ser paralelas, tienen el mismo vector director), basta aplicar la fórmula de la distancia del punto $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ a la segunda recta.

25. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Para hallar la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan, $d(r,s)$, hay que hacer una construcción considerando los siguientes planos:

- ✓ π: plano que pasa por s y es paralelo a r.
- ✓ π': plano que pasa por s y es perpendicular a π.
- ✓ π'': plano que pasa por r y es perpendicular a π.



La intersección de los planos π' y π'' es una recta t. Por la construcción realizada esta recta es perpendicular simultáneamente a r y s, y además corta a ambas rectas. Esta recta t se llama **perpendicular común** a r y s. Se llama distancia entre las rectas que se cruzan r y s a la distancia entre los puntos M y N en que la perpendicular común corta a r y s: $d(r,s)=d(M,N)$.

Si tomamos dos puntos cualesquiera de ambas rectas, que sean diferentes de M y N, y hallamos la distancia entre ellos, el número obtenido será mayor que la distancia entre M y N. Pero la distancia entre r y s es la "mínima distancia" entre ambas. Obsérvese que la distancia entre r y s coincide con la distancia de un punto cualquiera de r al plano π. Aclararemos este caso con un par de ejemplos:

1. *Hallar la distancia entre las rectas* $r\equiv\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ *y* $s\equiv\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+2z=0\end{cases}$

   Hallemos el plano π que pasa por s y es paralelo a r. Para ello escribamos la ecuación del haz de planos de arista s: $\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+2z)=0\Leftrightarrow(2\lambda+\mu)x-\lambda y+(\lambda+2\mu)z-\lambda=0$. Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(2\lambda+\mu,-\lambda,\lambda+2\mu)$ sea perpendicular al vector director de r: $(1,2,-1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $(2\lambda+\mu)\cdot1+\lambda\cdot2+(\lambda+2\mu)\cdot(-1)=0\Rightarrow-\lambda-\mu=0$. Para que esta última igualdad se cumpla basta elegir $\lambda=1,\ \mu=-1$, luego el plano π es $x-y-z-1=0$. La distancia buscada coincide por tanto con la distancia del punto P(3, 0, −1) de r al plano π:

$$d(r,\,s)=d(P,\,\pi)=\frac{|1\cdot3+(-1)\cdot0+(-1)\cdot(-1)+(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

2. *Hallar la perpendicular común a las rectas* r *y* s *del ejemplo anterior*.

   Ya hemos hallado el plano $\pi\equiv x-y-z-1=0$.

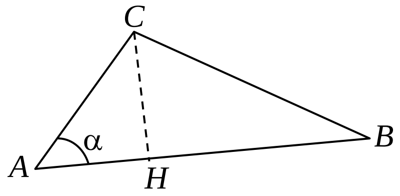
   - Hallemos el plano π'. Ya sabemos por el ejercicio anterior que el haz de planos de arista s es $(2\lambda+\mu)x-\lambda y+(\lambda+2\mu)z-\lambda=0$. Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir: $(2\lambda+\mu)\cdot1+(-\lambda)\cdot(-1)+(\lambda+2\mu)\cdot(-1)=0\Rightarrow2\lambda-\mu=0$.
     Para que esta igualdad se cumpla basta elegir, por ejemplo, $\lambda=1,\ \mu=2$. Entonces el plano π' es: $\pi'\equiv4x-y+5z-1=0$.
   - Hallemos el plano π''. Las ecuaciones implícitas de la recta r son: $\begin{cases}2x-6=y\\ -y=2z+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y-6=0\\ y+2z+2=0\end{cases}\Rightarrow$ el haz de planos de arista r es $\lambda(2x-y-6)+\mu(y+2z+2)=0\Leftrightarrow2\lambda x+(-\lambda+\mu)y+2\mu z+(-6\lambda+2\mu)=0$
     Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (de manera semejante al punto anterior): $2\lambda\cdot1+(-\lambda+\mu)\cdot(-1)+2\mu\cdot(-1)=0\Rightarrow3\lambda-3\mu=0$.
     Para que esta igualdad se cumpla basta elegir, por ejemplo, $\lambda=1,\ \mu=1$. Por tanto el plano π'' es: $2x+2z-4=0$, es decir, $\pi''\equiv x+z-2=0$.

   La recta t (perpendicular común a r y s) es la intersección de π' y π'', por tanto: $t\equiv\begin{cases}4x-y+5z-1=0\\ x+z-2=0\end{cases}$

26. Área de un triángulo

Dados tres puntos del espacio $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B(b_1,\, b_2,\, b_3)$ y $C(c_1,\, c_2,\, c_3)$, llamemos S al área del triángulo cuyos vértices son A, B, C y $\vec{u}$ al vector $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}$. Entonces:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$



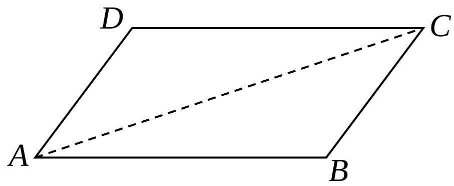
Demostración:

El área del triángulo ABC vale:

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot sen\,\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot sen\,\alpha=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

27. Área de un paralelogramo

Dado un paralelogramo $ABCD$ en el espacio, supongamos que las coordenadas de tres vértices son $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B(b_1,\, b_2,\, b_3)$ y $C(c_1,\, c_2,\, c_3)$. Llamemos, al igual que en el apartado anterior, S al área del paralelogramo y $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}$.



Entonces:

$$\mathrm{S}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

Demostración:

Un paralelogramo se puede descomponer en dos triángulos iguales trazando la diagonal. Basta con aplicar la fórmula del área del triángulo del apartado anterior.

28. Volumen de un tetraedro

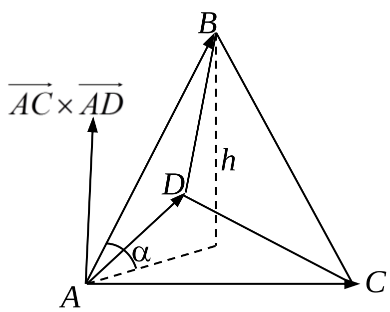
Sean $A(a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B(b_1,\, b_2,\, b_3)$, $C(c_1,\, c_2,\, c_3)$ y $D(d_1,\, d_2,\, d_3)$ cuatro puntos del espacio. Al unirlos entre sí de todas las maneras posibles, determinan un tetraedro cuyo volumen V es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)$, es decir $V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}\right|$

Demostración:

El volumen del tetraedro es la tercera parte del área de la base por la altura $\Rightarrow V=\frac{1}{3}\left(\text{Área } ACD\right)\cdot h=$

$$=\frac{1}{3}\left(\text{Área } ACD\right)\cdot AB\cdot\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{3}\left(\text{Área } ACD\right)\cdot AB\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

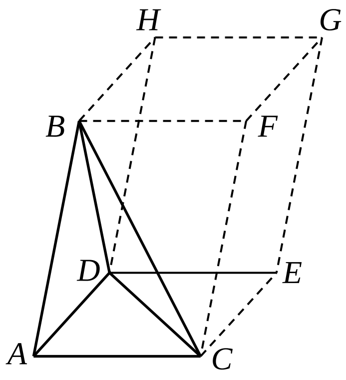
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}$$



Según el orden en que tomemos los vectores ese determinante puede salir positivo o negativo. Por lo tanto, para que el volumen sea positivo, en la fórmula pondremos el valor absoluto del determinante.

29. Volumen de un paralelepípedo

Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos. El volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base multiplicada por la altura. Podemos tomar como base cualquiera de las caras, y en este caso la altura será la distancia existente entre los planos que contienen a dos bases opuestas. Dados cuatro puntos del espacio $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$, podemos realizar la construcción de la figura para obtener un paralelepípedo. Su volumen V es el valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, es decir: $V = \left| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right|$



Demostración:
El paralelepípedo *ABCEDHFG* puede descomponerse en dos prismas triangulares *ACDHBF* y *CEDHFG*, los cuales tienen el mismo volumen, por tener la misma base y la misma altura. Además, el prisma *ACDHBF* tiene la misma base y la misma altura que el tetraedro *ACDB*, luego su volumen es tres veces mayor. Por lo tanto el volumen del paralelepípedo es seis veces mayor que el volumen del tetraedro *ACDB*. Basta aplicar la fórmula del volumen del tetraedro.