El teorema del valor intermedio

Ya hemos tratado en un artículo anterior el problema de la continuidad de una función. Ahora nos hemos de preguntar sobre las ventajas que, en análisis matemático, nos proporciona este hecho. Existen una serie de resultados importantes que nos dan propiedades fundamentales de las funciones continuas, sobre todo de las funciones definidas por intervalos. Lo pondremos de manifiesto en este artículo (dedicado al teorema de los ceros de Bolzano y al teorema del valor intermedio), y en otros dos próximos (propiedad de compacidad, funciones continuas e inyectivas). La lectura de este artículo también exigiría la lectura anterior del artículo dedicado a los mayorantes y minorantes, al supremo y al ínfimo y al axioma del supremo.

Antes de entrar de lleno en las propiedades de las funciones continuas definidas por intervalos recordaremos una amplia familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Dados dos números reales a y b, con $a \leqslant b$, notaremos:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\}$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$$

Estos conjuntos reciben, respectivamente, el nombre de *intervalo cerrado*, *semiabierto por la derecha*, *semiabierto por la izquierda* y *abierto*, *de origen a y extremo b*.

Dado un número real a cualquiera, notaremos también:

$$(\leftarrow,a] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant a\}$$

$$(\leftarrow,a) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}$$

$$[a,\rightarrow) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant a\}$$

$$(a,\rightarrow) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}$$

conjuntos que reciben, respectivamente, el nombre de *semirrecta cerrada de extremo a*, *abierta de extremo a*, *cerrada de origen a* y *abierta de origen a*. A los conjuntos anteriores también se les suele notar, respectivamente, del siguiente modo: $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$.

Diremos que un conjunto A de números reales es un *intervalo* si $A = \mathbb{R}$ o bien A responde a una de las ocho descripciones dadas anteriormente. Por cierto, hay que hacer notar que el conjunto vacío y el conjunto $\{a\}$ (formado por un solo elemento) en que a es un número real, son intervalos.

Es inmediato comprobar que si A es un intervalo y x, y son elementos de A con $x < y$ todo real z en la situación $x \leqslant z \leqslant y$ pertenece al conjunto A. Veamos a continuación una propiedad que caracteriza a los intervalos y que no es tan evidente.

Proposición.
Condición necesaria y suficiente para que un conjunto A de números reales sea un intervalo es que para cualesquiera dos elementos x e y de A con $x < y$ se tenga $[x, y] \subset A$.
Demostración.
La necesidad de la condición es comprobación inmediata, tal y como se ha comentado anteriormente.
Para probar la suficiencia, sea A un conjunto de números reales verificando la siguiente condición:

$$x,\, y \in A\,,\, x < y \Rightarrow [x, y] \subset A$$

Deberemos probar que A es uno de los nueve tipos de intervalos definidos anteriormente.
Si A es vacío no hay nada que demostrar, pues entonces para cualquier número real a se tiene $A = (a, a)$. Supongamos por tanto A no vacío y distingamos varios casos.

- Si A no está minorado ni mayorado, dado $z \in \mathbb{R}$, z no puede ser minorante ni mayorante de A, luego existen x, y en A, con $x < z < y$, de donde $z \in [x, y] \subset A$ y obtenemos $A = \mathbb{R}$.

- Si A está mayorado pero no minorado, sea $b = \sup A$. Entonces, dado $z \in \mathbb{R}$, con $z < b$, z no es mayorante ni minorante de A, luego existen x, $y \in A$, con $x < z < y$, de donde $z \in [x, y] \subset A$. Se tiene por tanto: $(-\infty, b) \subset A \subset (-\infty, b]$, lo que deja dos posibilidades: $A = (-\infty, b)$ o bien $A = (-\infty, b]$.

- Si A está minorado pero no mayorado se demuestra de manera análoga al caso anterior que o bien $A = (a, +\infty)$ o bien $A = [a, +\infty)$, en que $a = \operatorname{ínf} A$.

- Finalmente, si A está acotado, sean $a = \operatorname{ínf} A$ y $b = \sup A$. Dado z, con $a < z < b$, z no puede ser mayorante ni minorante de A, luego existen otra vez x, $y \in A$ tales que $x < z < y$, de donde $z \in A$. Así tenemos: $(a, b) \subset A \subset [a, b]$, lo que deja cuatro posibilidades según que a y b pertenezcan o no al conjunto A, a saber: $A = (a, b)$, $A = (a, b]$, $A = [a, b)$, $A = [a, b]$.

La primera de las propiedades de las funciones continuas definidas en intervalos es la conocida como propiedad del valor intermedio, según la cual una función continua en un intervalo que tome dos valores está obligada a tomar todos los comprendidos entre ellos. Desde el punto de vista gráfico es bastante intuitivo imaginar esta situación, la cual vamos a formalizar. Antes necesitamos probar algunos resultados.

Lema (conservación del signo).
Sea A un conjunto de números reales, x_0 un punto de A y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0 con $f(x_0) \neq 0$. Entonces existe un número real positivo δ tal que si x es cualquier punto de A verificando $|x - x_0| < \delta$ se tiene $f(x)f(x_0) > 0$ (o lo que es lo mismo, $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$).
Demostración.
Por ser f una función continua en x_0 tenemos, por la caracterización de la continuidad (ver el final de artículo dedicado a la continuidad de una función), que

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0 \,:\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En particular, tomando $\varepsilon = |f(x_0)|$, obtenemos

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|$$

y por tanto

$$f(x_0) - |f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)| \qquad (1)$$

de donde se obtiene que $|f(x)|$ y $|f(x_0)|$ tienen el mismo signo, ya que

- Si $f(x_0) < 0$, la doble desigualdad (1) se transforma en $2f(x_0) < f(x) < 0$.
- Si $f(x_0) > 0$, la doble desigualdad (1) se transforma en $0 < f(x) < 2f(x_0)$.

En particular, si $f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ y si $f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Teorema (de los ceros de Bolzano).
Sean a, b números reales con $a < b$ y f una función de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y verificando $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces existe un número real c con $a < c < b$, tal que $f(c) = 0$.
Demostración.
Sea $C = \{x \in [a, b] \,:\, f(x) < 0\}$. Evidentemente C es no vacío pues $a \in C$, y C está mayorado (por b). Por el axioma del supremo, llamemos $c = \sup C$ que claramente verifica $a \leqslant c \leqslant b$. Sólo resta probar que $f(c) = 0$ (pues entonces $a \neq c$ y $b \neq c$, luego $c \in (a, b)$).
Por ser $c = \sup C$ existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C convergente a c (ver el ejercicio 4 del artículo dedicado a las propiedades de las sucesiones convergentes). Como f es continua en el punto c tenemos que $\{f(x_n)\} \to c$ y, por ser $f(x_n) < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $f(c) \leqslant 0$ (en

virtud del corolario 3 del artículo dedicado a las propiedades de las sucesiones convergentes). Supongamos ahora la desigualdad estricta, es decir, que $f(c) < 0$; aplicando el lema anterior encontramos $\delta > 0$ tal que si $x \in [a,b]$ y $|x - c| < \delta$ se tiene $f(x) < 0$. Por ser $f(b) > 0$ deducimos que $|b - c| \geqslant \delta$, esto es, $c + \delta \leqslant b$; entonces $c + \frac{\delta}{2} \in [a,b]$ y $f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < 0$ luego $c + \frac{\delta}{2} \in C$, lo cual es una contradicción. Así pues hemos obtenido $f(c) = 0$, tal y como se quería.

Teorema (del valor intermedio).
Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces $f(I)$ es un intervalo.
Demostración.
Sean $\alpha, \beta \in f(I)$ verificando $\alpha < \beta$; bastará probar, teniendo en cuenta la proposición demostrada al principio de este artículo, que $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, esto es, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \lambda < \beta$ debemos encontrar un z de I tal que $f(z) = \lambda$. Sean x, y puntos de I tales que $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$. Puesto que $x \neq y$, podrán darse dos casos.

Si $x < y$ se tiene $[x,y] \subset I$; sea $g : [x,y] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(t) - \lambda$, $\forall\, t \in [x,y]$. Evidentemente g es continua en $[x,y]$ y se verifica

$$g(x) = \alpha - \lambda < 0 < \beta - \lambda = g(y)$$

luego, por el teorema de los ceros de Bolzano, existe $z \in (x,y)$ tal que $g(z) = 0$. Entonces $z \in I$ y $f(z) = \lambda$.

Si $x > y$ se aplica el mismo razonamiento tomando el intervalo $[y,x]$ y la función $g : [y,x] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \lambda - f(t)$, $\forall\, t \in [y,x]$.

Nótese que el hecho de que $f(I)$ sea un intervalo significa (como se ha puesto de manifiesto en la demostración) ni más ni menos que si f toma dos valores está obligada a tomar todos los intermedios. Queda claro pues que el teorema del valor intermedio incluye al teorema de los ceros de Bolzano como caso particular (aunque también muy especial pues la demostración del primero se reduce, tal y como hemos visto, al segundo).

Proponemos a continuación una colección de doce ejercicios (con sus soluciones) relacionados con los dos teoremas demostrados anteriormente.

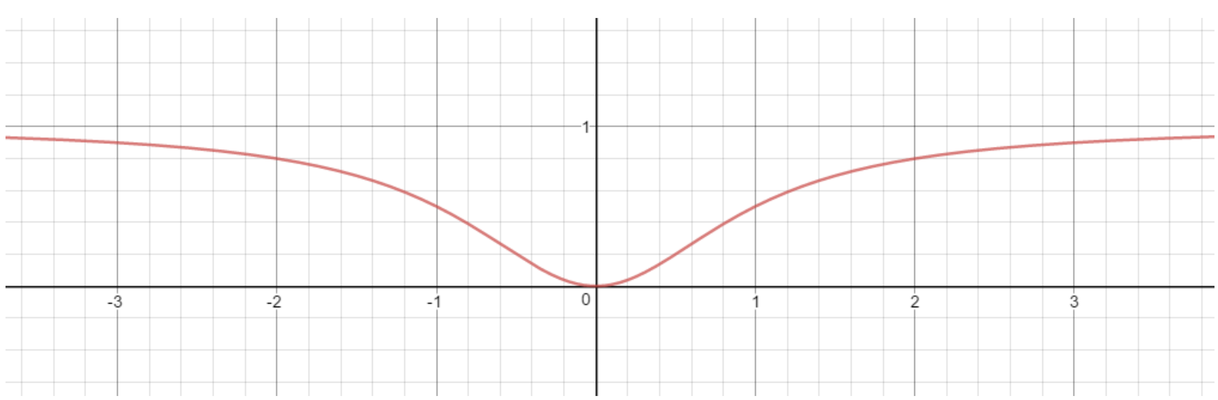
1. Dar un ejemplo de una función continua en un punto x_0 que no tenga signo constante en ningún intervalo abierto centrado en dicho punto (intervalo de la forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$).

Solución.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Tomemos $x_0 = 0$. Entonces f no tiene signo constante en ningún intervalo de la forma $(-\delta, \delta)$, pues si $\alpha \in (-\delta, 0)$, entonces $f(\alpha) = \alpha^3 < 0$ pues $\alpha < 0$; y si $\alpha \in (0, \delta)$, $f(\alpha) = \alpha^3 > 0$ ya que $\alpha > 0$.

2. Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
Solución.
Sea $f : A = [-1, 0] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Claramente f es continua en todo punto de su conjunto de definición. Sin embargo $f(A) = [-1, 0] \cup [1, 2]$, que no es un intervalo.

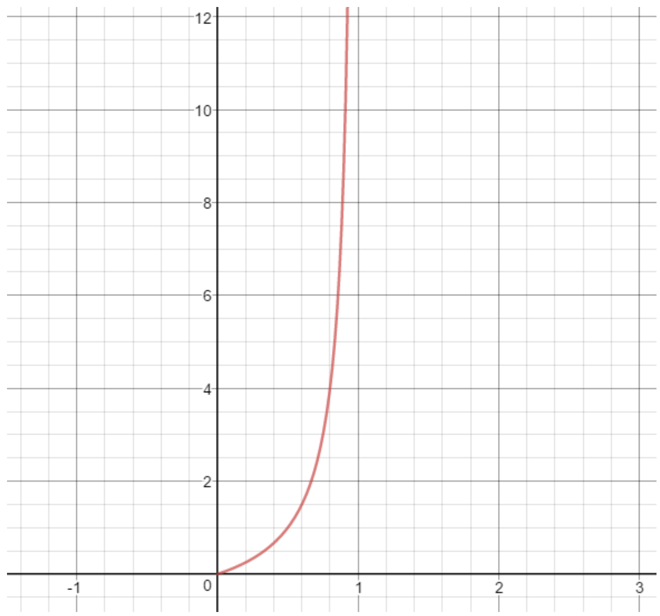
3. Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
Solución.
Sea $f : A = [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida del siguiente modo:
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$
La función f está definida en un intervalo y no es continua en cero. Sin embargo se tiene que $f(A) = [0, 1]$, que sí que es un intervalo.

4. Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligadamente un intervalo) acotado.
Solución.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. La función f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser una función racional y no es constante. Además $f(\mathbb{R}) = [0, 1)$ (véase la representación gráfica).



5. Dar un ejemplo de una función continua en $[0, 1)$ tal que $f([0, 1))$ sea no acotado.
Solución.

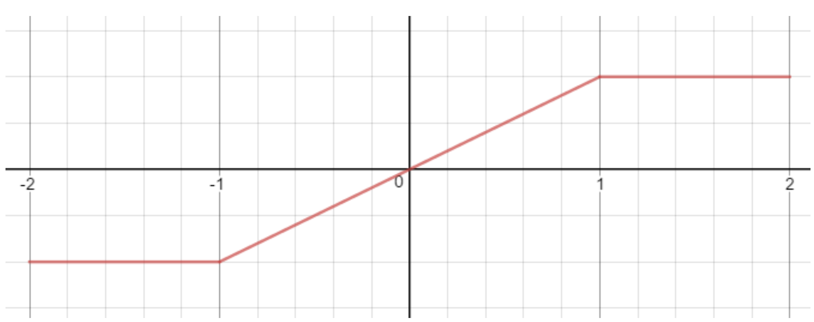
Sea $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Claramente f es continua en $[0,1)$ por ser una función racional. Además $f([0,1)) = [0,+\infty)$, que es un intervalo no acotado (ver representación gráfica).



6. Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.
Solución.
Sea $f : (-2,2) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

La función es claramente continua y $f\left((-2,2)\right) = [-1,1]$.



7. Pruébese que si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua en I verificando $f(I) \subset \mathbb{Q}$, entonces f es constante.
   Solución.
   Si f no fuese constante podría tomar, al menos, dos valores distintos. Sean éstos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ tal que, por ejemplo, $f(x_1) < f(x_2)$. Como f es continua en I, e I es un intervalo, $f(I)$ también es un intervalo y por tanto $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(I) \subset \mathbb{Q}$. Esto es absurdo pues entre dos racionales siempre hay algún irracional. Por tanto f toma un solo valor y f es constante.

8. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Supongamos que toda función continua de A en $\{0, 1\}$ (es decir, cuya imagen esté incluida en el conjunto $\{0, 1\}$) es constante. Pruébese que A es un intervalo.
   Solución.
   Si A no fuese un intervalo, dados $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, sería posible encontrar un número real z tal que $x_1 < z < x_2$ con $z \notin A$. Sea ahora la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < z \\ 1 & \text{si} \quad x > z \end{cases}$$

   Es claro que f es continua en A (recuérdese que la continuidad es un propiedad local) y además toma el valor 0 y el valor 1, lo cual contradice el supuesto de que toda función continua de A en $\{0, 1\}$ es constante. Así pues, A es un intervalo.

9. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.
   Solución.
   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   con $a_n \neq 0$ y n impar. Podemos suponer $a_n = 1$ (en caso contrario bastaría dividir todo entre a_n). Por tanto tomaremos

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   Entonces

$$\frac{f(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

   Consideremos la sucesión

$$\left\{ \frac{f(k)}{k^n} \right\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ 1 + \frac{a_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{a_1}{k^{n-1}} + \frac{a_0}{k^n} \right\}$$

Claramente $\left\{\dfrac{f(k)}{k^n}\right\} \to 1$. Por tanto existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{f(m_1)}{m_1^n} > 0$, de donde se deduce que $f(m_1) > 0$.
Consideremos, por otro lado, la sucesión

$$\left\{\frac{f(-k)}{(-k)^n}\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{1 - \frac{a_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{a_1}{k^{n-1}} - \frac{a_0}{k^n}\right\}$$

También es claro que $\left\{\dfrac{f(-k)}{(-k)^n}\right\} \to 1$, con lo que existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{f(-m_2)}{(-m_2)^n} > 0$, con lo que $f(-m_2) < 0$ (ya que al ser n impar $(-m_2)^n < 0$.
Como consecuencia, por el teorema de los ceros de Bolzano, existe $c \in (-m_2, m_1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, tal que

$$a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = 0$$

y, por tanto, c es una raíz del polinomio.

10. Dado un número real positiva a, pruébese que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = a$. El tal x es único.
Solución.
Sea $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - a$, donde b es un número real cumpliendo que $b^2 > a$. f es claramente continua y además $f(0) = -a < 0 < b^2 - a = f(b)$. Por el teorema de los ceros de Bolzano, existe $c \in (0, b)$ tal que $f(c) = c^2 - a = 0$, o lo que es lo mismo, $c^2 = a$. Si existiera otro valor $d \in (0, b)$ tal que $d^2 = a$ tendríamos $c^2 = d^2$ de donde se deduce que $c = d$, ya que tanto c como d son números reales positivos. Así pues el número que se busca es único.

11. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo: $\exists\, x \in [0, 1] : f(x) = x$.
Solución.
Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por $g(x) = f(x) - x$. La función g es continua en $[0, 1]$ por serlo f. Además, $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0$ (la imagen de f es el intervalo $[0, 1]$), y $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Si en una de las dos desigualdades se da el igual, entonces el punto buscado es el 0 o el 1. Si las desigualdades son estrictas, por el teorema de los ceros de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = f(c) - c = 0$, es decir, $f(c) = c$.

12. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.
Solución.

Consideremos la función temperatura definida sobre una circunferencia, es decir, sobre el Ecuador $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ que según la hipótesis es continua y sea ahora la siguiente función: $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = T(x + \pi) - T(x)$, que es continua por serlo T. Se tiene, por un lado, que $f(0) = T(\pi) - T(0)$, y por otro $f(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = T(0) - T(\pi)$. Ahora se pueden dar dos casos. Que $T(\pi) - T(0) = 0 \Rightarrow T(\pi) = T(0)$, y hemos terminado. O bien que $T(\pi) - T(0) \neq 0$. En este caso $f(0) = T(\pi) - T(0)$ y $f(\pi) = T(0) - T(\pi)$ tienen distinto signo por ser números opuestos. Aplicando el teorema de los ceros de Bolzano, existe $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = T(c + \pi) - T(c) = 0$, es decir, $T(c + \pi) = T(c)$, tal y como queríamos demostrar.