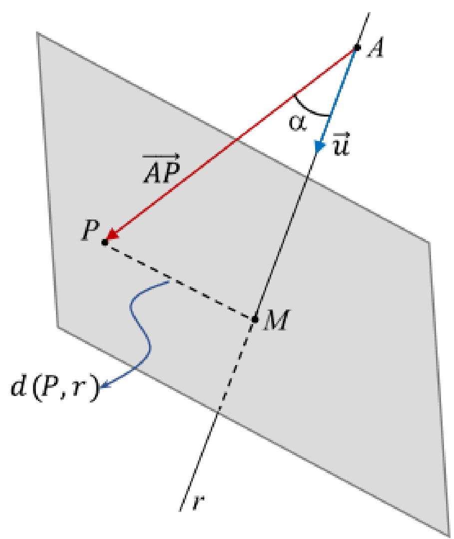
Distancia entre dos rectas que se cruzan
Perpendicular común

En un espacio de tres dimensiones dos rectas se cruzan cuando no tienen ningún punto en común y no están contenidas en el mismo plano. Si no tienen ningún punto en común pero sí que están contenidas en un mismo plano las rectas son paralelas.

Distancia entre dos rectas paralelas

Si las rectas son paralelas la distancia entre ambas viene dada por la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Se entiende por distancia la distancia mínima del punto a la recta. La construcción requiere hallar el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto. Este plano perpendicular cortará a la recta en cuestión en otro punto. De este modo, la distancia del punto a la recta será igual a la distancia entre los dos puntos mencionados. Vamos a hallar una fórmula que permita hallar esta distancia. Para ello sea $P(p_1, p_2, p_3)$ un punto y r una recta que vamos a escribir en su forma continua:

$$r \equiv \frac{x - a_1}{u_1} = \frac{x - a_2}{u_2} = \frac{x - a_3}{u_2}$$



Recordemos que $A(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ son un punto y un vector director de r, respectivamente. Supongamos también que $M(m_1, m_2, m_3)$ es el punto en el que el plano perpendicular a r que contiene a P corta a la recta r (ver figura anterior). A la distancia del punto P a la recta r, que es lo que queremos calcular, la notaremos $d(P, r)$. El vector que une el punto A de la recta con el punto P es $\overrightarrow{AP} = (p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3)$.

Por un lado tenemos que el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AP}$ con $\vec{u}$ es:

$$|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}| = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\vec{u}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Por otro lado, observando la figura anterior se tiene que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{d(P, r)}{|\overrightarrow{AP}|} \Rightarrow d(P, r) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Por tanto, sustituyendo en la primera expresión:

$$|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}| = d(P, r) \cdot |\vec{u}|$$

Y de aquí obtenemos finalmente que la distancia entre un punto y una recta la podemos calcular mediante la siguiente fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3)|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan. Perpendicular común

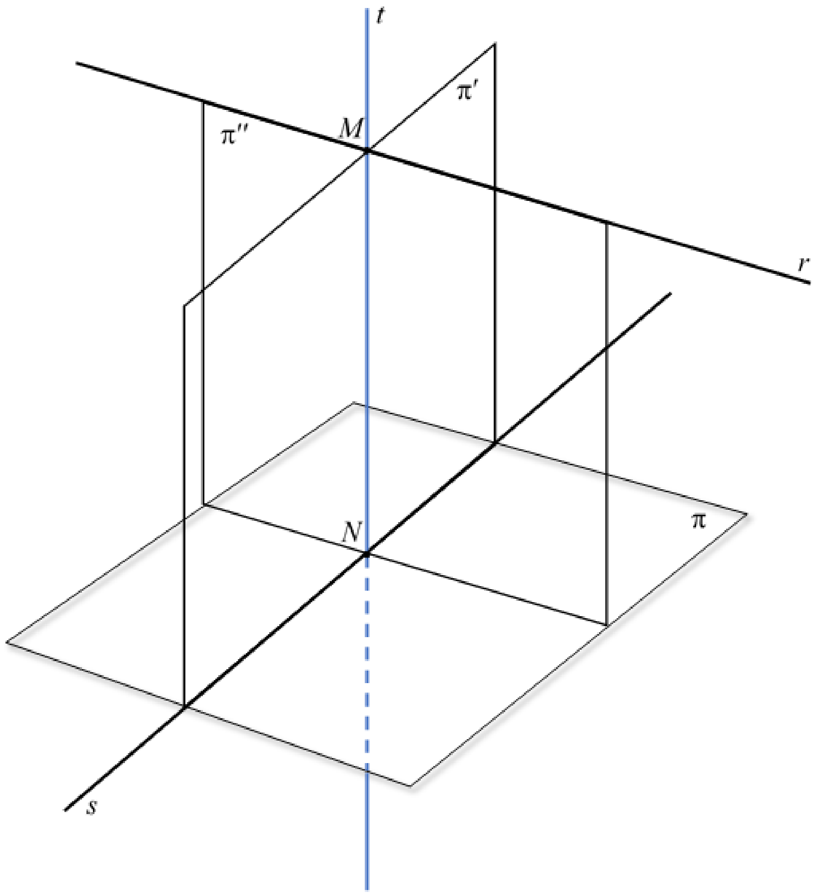
Supongamos ahora que tenemos dos rectas r y s que se cruzan. Para hallar la distancia entre ambas, $d(r, s)$, lo que se hace es calcular el plano que contienen a una de ellas (por ejemplo a s) y es paralelo a la otra (en este caso a r). La distancia entre ambas rectas vendrá dada por la distancia de la recta r a este plano, distancia que obviamente coincidirá con la distancia de un punto de r a dicho plano (por ser ambos paralelos). Por cierto, la distancia de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, viene dada por la fórmula siguiente:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

El cálculo de la perpendicular común a r y a s, es decir, de la recta que corta perpendicularmente a ambas, que llamaremos t, precisa de una construcción en tres pasos. Son los siguientes:

- Cálculo del plano π que contiene a s y es paralelo a r.
- Cálculo del plano π' que contiene a s y es perpendicular a π.
- Cálculo del plano π'' que contiene a r y es perpendicular a π.

Entonces, tal y como se puede apreciar en la figura siguiente, la perpendicular común t a r y a s será la intersección de los planos π' y π'': $t = \pi' \cap \pi''$. Hemos llamado también M al punto de corte de r y t, y N al punto de corte de s y t: $M = r \cap t$, $N = s \cap t$.



Tal y como hemos comentado anteriormente, la distancia entre r y s es la misma que la distancia entre r y π, distancia que, obviamente, también ha de coincidir con la distancia entre los puntos M y N:

$$d(r,s) = d(r,\pi) = d(M,N)$$

Veamos un caso práctico. Consideremos las rectas r y s siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2z=-1 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv x = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

Lo primero de todo es comprobar que, efectivamente, ambas rectas se cruzan. Si escribimos la recta r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

tenemos que un punto y un vector director de r son, respectivamente, $A(-1,2,0)$ y $\vec{u} = (2,-1,1)$. Del mismo modo, un punto y un vector director de la recta s son, respectivamente, $B(0,-2,1)$,

$\vec{v} = (1, -1, 2)$.
Por un lado, tenemos que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

ya que la matriz anterior contiene al menos un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1 \neq 0$$

Por otro lado, tenemos que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-2 - 2 - 4) - (-1 - 1 - 16) = -8 - (-18) = 10 \neq 0$$

Del razonamiento anterior se deduce que las rectas r y s se cruzan. Vamos a dar los pasos mencionados anteriormente para hallar la perpendicular común y la distancia entre r y s.

En primer lugar vamos a hallar el plano π que contiene a s y es paralelo a r. Un punto de dicho plano será un punto de s, por ejemplo el punto $B(0, -2, 1)$ y dos direcciones suyas serán las de r y las de s, es decir, podemos tomar como vectores directores del plano los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$. Así el plano π vendrá dado por

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante anterior:

$$(-2x + y + 2 - 2z + 2) - (-z + 1 + 4y + 8 - x) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y + z + 5 = 0$$

Teniendo en cuenta que la ecuación general de la recta s es:

$$s \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

otra forma de hallar el plano π es hacer uso del haz de planos de arista la recta s:

$$\lambda(x+y+2)+\mu(2x-z+1)=0 \Leftrightarrow (\lambda+2\mu)x+\lambda y-\mu z+2\lambda+\mu=0$$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r un vector normal al plano, $(\lambda+2\mu,\lambda,-\mu)$, debe ser perpendicular al vector director de r, $\vec{u}=(2,-1,1)$, es decir:

$$2(\lambda+2\mu)+(-1)\lambda+1(-\mu)=0 \Leftrightarrow \lambda+3\mu=0$$

Esta igualdad se cumple, por ejemplo, para $\lambda=3$ y $\mu=-1$, con lo que el plano π que buscamos será:

$$\pi \equiv x+3y+z+5=0$$

Llegados a este punto ya estamos en condiciones de hallar la distancia entre r y s: $d(r,s)=d(r,\pi)$. Además, esta última distancia coincidirá con $d(A,\pi)$:

$$d(r,s)=(r,\pi)=d(A,\pi)=\frac{|1\cdot(-1)+3\cdot 2+1\cdot 0+5|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{11}}=\frac{10\sqrt{11}}{11}$$

Continuando con nuestra construcción calcularemos, en segundo lugar, el plano π' que contiene a s y es perpendicular a π. Ya hemos visto que el haz de planos de arista la recta s es

$$(\lambda+2\mu)x+\lambda y-\mu z+2\lambda+\mu=0$$

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se ha de cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sea ellos mismos también perpendiculares, es decir:

$$1(\lambda+2\mu)+3\lambda+1(-\mu)=0 \Leftrightarrow 4\lambda+\mu=0$$

Tomando $\lambda=-1$ y $\mu=4$, tenemos que el plano π' es el siguiente:

$$\pi' \equiv 7x-y-4z+2=0$$

En tercer y último lugar vamos a calcular el plano π'' que contiene a r y es perpendicular a π. Para ello volveremos a usar la técnica del haz de planos, pero en este caso de arista la recta r:

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-2z+1)=0 \Leftrightarrow (\lambda+\mu)x+\lambda y+(-\lambda-2\mu)z+(-\lambda+\mu)=0$$

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se tiene que cumplir, al igual que en el caso anterior, que los vectores perpendiculares a ambos planos sean también perpendiculares, es decir:

$$1(\lambda+\mu)+3\lambda+1(-\lambda-2\mu)=0 \Leftrightarrow 3\lambda-\mu=0$$

Tomando $\lambda = 1$ y $\mu = 3$, obtenemos el plano π'':

$$\pi'' \equiv 4x + y - 7z + 2 = 0$$

La recta t, perpendicular común a r y a s, es la intersección de π' y de π''. Por tanto:

$$t = \pi' \cap \pi'' \equiv \begin{cases} 7x - y - 4z + 2 = 0 \\ 4x + y - 7z + 2 = 0 \end{cases}$$

Vamos a mostrar que la distancia hallada anteriormente entre las rectas r y s coincide con la distancia entre los puntos M y N.

Para hallar los puntos M y N resolveremos los sistemas formados por r y t, por un lado, y por s y t, por otro, ya que $r \cap t = M$ y $s \cap t = N$.

El sistema formado por r y t tiene cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Podemos eliminar una de ellas, por ejemplo la última ecuación de la recta t. El sistema queda del siguiente modo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 7x - y - 4z = -2 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 7 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-14 + 1) - (-4 + 2) = -13 + 2 = -11$$

Por tanto, aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{(4-1) - (4+2)}{-11} = \frac{-3}{-11} = \frac{3}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 7 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{(4 - 14 + 2) - (7 - 4 + 4)}{-11} = \frac{-15}{-11} = \frac{15}{11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{(-7 - 1) - (-2 + 1)}{-11} = \frac{-7}{-11} = \frac{7}{11}$$

De manera similar resolveremos el sistema formado por la recta s y por la recta t. También eliminaremos la última ecuación de la recta t. El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-z=-1 \\ 7x-y-4z=-2 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -7-(-8+1) = -7+7 = 0$$

Esto indica que no podemos eliminar la última ecuación de la recta r. Así que eliminaremos la primera y el sistema quedará de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-z=-1 \\ 4x+y-7z=-2 \end{cases}$$

Ahora el determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -4-(-14-1) = -4+13 = 11$$

Volviendo a aplicar la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{2-(7+2)}{11} = -\frac{7}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix}}{11} = \frac{(7+8)-(28+2)}{11} = -\frac{15}{11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{11} = \frac{(-4-4)-(-4-1)}{11} = -\frac{3}{11}$$

De este modo tenemos que

$$M = r \cap t = \left(\frac{3}{11}, \frac{15}{11}, \frac{7}{11}\right) \quad ; \quad N = s \cap t = \left(-\frac{7}{11}, -\frac{15}{11}, -\frac{3}{11}\right)$$

Y de aquí:

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{7}{11} - \frac{3}{11}, -\frac{15}{11} - \frac{15}{11}, -\frac{3}{11} - \frac{7}{11}\right) = \left(-\frac{10}{11}, -\frac{30}{11}, -\frac{10}{11}\right)$$

Así pues, la distancia entre las rectas r y s es:

$$d(r,s) = d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\left(-\frac{10}{11}\right)^2 + \left(-\frac{30}{11}\right)^2 + \left(-\frac{10}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{1100}}{11} = \frac{10\sqrt{11}}{11}$$