El último axioma. El axioma del supremo

Hay conceptos matemáticos de los que apenas se habla en las matemáticas del Bachillerato, o bien se pasa de puntillas sobre ellos. Es cierto que "jugamos" con los números reales dando por hecho muchas propiedades de los mismos y eso está bien, pues de manera intuitiva el alumno no tiene porqué preguntarse algunas cosas realmente obvias. Por poner un par de ejemplos, damos por hecho como axiomas las propiedades asociativa y conmutativa para la suma y para el producto, y establecemos un orden en los números reales representándolos en la recta real, añadiendo propiedades para las desigualdades que el alumno admite sin problemas. Hay otros conceptos, precisamente relacionados con las desigualdades, como los distintos intervalos o semirrectas de la recta real, así como los conceptos de máximo y de mínimo de un conjunto de números reales, de los que también se habla en la Secundaria y en el Bachillerato y que el alumno suele entender con cierta facilidad. Sin embargo, insistiendo en las desigualdades y en el orden numérico establecido en el conjunto de los números reales, dejamos de lado ciertos conceptos como los de cota superior o inferior, conjunto mayorado o minorado, supremo e ínfimo. La idea es que el alumno, además de admitir que hay cosas realmente evidentes en el conjunto de los números reales, debe considerar el hecho de que todos los axiomas y propiedades convierten al conjunto de los números reales en un conjunto con unas estructuras, que lo hacen realmente potente para continuar trabajando en otros ámbitos más precisos de las matemáticas.

En esta Web ya se ha hablado de del conjunto de los números reales y de sus estructuras en algunos artículos. Son los siguientes:

- Introducción al número real. Un paseo por el concepto de número en la Secundaria Obligatoria.
- El conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo.
- El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado conmutativo.
- Valor absoluto.
- El conjunto de los números naturales. Una definición rigurosa y algunas propiedades.

Se recomienda la lectura de los artículos anteriores para comprender este con más facilidad, aunque no es que sea estrictamente necesario.

Y es que en este artículo vamos a poner bases sólidas a ideas que son fáciles de admitir y que tienen que ver con el orden establecido (estructura de cuerpo ordenado) en el conjunto de los números reales. Después de ello podremos enunciar un axioma que, tal y como expresa el título de este artículo, es el último que vamos a dar por hecho en nuestro conjunto: el axioma del supremo. Tal y como decía uno de mis profesores, es un axioma fácil de entender y no tan fácil de asimilar. El hecho de asimilar el axioma del supremo tiene que ver, además de reflexionar bastante sobre el mismo, con la agilidad y práctica en el uso de las desigualdades y acotaciones, cuestiones que facilitarán enormemente no solamente la resolución de algunos ejercicios, sino entender con facilidad muchas demostraciones, ya que el uso que se hará del axioma del supremo en temas posteriores del análisis matemático es realmente abundante. Vuelvo a admitir que he usado como guía el texto de Camilo Aparicio del Prado y Rafael Payá Albert, titulado Análisis Matemático I, y que fue mi referente principal al empezar los estudios superiores de matemáticas. Otros textos de Análisis Matemático afrontan este episodio de manera similar.

Mayorantes, minorantes, supremo e ínfimo

Existen conjuntos no vacíos de números reales que no tienen máximo ni mínimo, por ejemplo $\mathbb{R}$. El conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

no tiene máximo ni mínimo como se puede fácilmente comprobar, pero, a diferencia de $\mathbb{R}$, existen números reales mayores o iguales que todos los de A y números reales menores o iguales que todos los de A. A continuación damos nombres a estos números reales. Merece la pena recordar que estas definiciones pueden hacerse en cualquier cuerpo ordenado.

Definición 1.

Sea A un conjunto no vacío de números reales. Diremos que un número real x es *mayorante* (o *cota superior*) de A si verifica

$$x \geqslant a, \forall a \in A$$

Diremos que un número real x es *minorante* (o *cota inferior*) de A cuando sea

$$x \leqslant a, \forall a \in A$$

Nótese que, a diferencia del máximo y del mínimo, un mayorante o minorante de un conjunto no tiene por qué pertenecer a dicho conjunto. De hecho, es claro que el máximo (respectivamente, el mínimo) de un conjunto, si existe, es un mayorante (respectivamente, un minorante) de dicho conjunto, y que un mayorante (respectivamente, un minorante) de un conjunto A es máximo (respectivamente, mínimo) de A si, y sólo si, pertenece a A.

Si un conjunto admite un mayorante diremos que está *mayorado* (o *acotado superiormente*). Si un conjunto admite un *minorante* diremos que está minorado (o *acotado inferiormente*). Si un conjunto está a la vez mayorado y minorado diremos que está *acotado*.

Dado un conjunto A de números reales, notaremos $M(A)$ al conjunto de los mayorantes de A, y $m(A)$ al conjunto de su minorantes. Nótese que si A está mayorado ($M(A) \neq \emptyset$), entonces $M(A)$ es un conjunto infinito (puesto que si $x \in M(A)$, entonces $\{x+n : n \in \mathbb{N}\} \subset M(A)$). Análogamente, si A está minorado, entonces $m(A)$ es infinito.

A titulo de ejemplo, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ está acotado, $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado, $\mathbb{R}^+$ está minorado pero no mayorado y $\mathbb{R}^-$ está mayorado pero no minorado. El siguiente lema puede ayudar a determinar todos los mayorantes y minorantes de un conjunto.

Lema
Sean a y b números reales y supongamos $a < b + \varepsilon$ para todo ε real y positivo. Entonces $a \leqslant b$.
Demostración.
Supongamos por el contrario que $b < a$ y sea entonces $\varepsilon = a - b$; se tiene que $a < b + \varepsilon = a$, lo cual es una contradicción.

Utilizando este lema es fácil comprobar que:

$$M(\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x\} \quad ;$$

$$m(\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\} = \mathbb{R}_0^- \quad ;$$

$$M(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}_0^+ \quad ; \quad m(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}_0^-$$

Definición 2.
Sea A un conjunto no vacío de números reales. Si A está mayorado y el conjunto de los mayorantes de A tiene mínimo, se define el *supremo* de A como el mínimo del conjunto de los mayorantes de A. Análogamente se define el *ínfimo* de un conjunto como el máximo del conjunto de sus minorantes supuesto que exista.

Claramente el supremo y el ínfimo de un conjunto, si existen, son únicos y son respectivamente un mayorante y un minorante del mismo. Notaremos $\sup A$ (respectivamente $\inf A$) al supremo (respectivamente ínfimo) de un conjunto A. En vista de lo dicho anteriormente se tiene:

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = 1 \quad ; \quad \inf\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = 0$$

$$\sup \mathbb{R}^- = \sup \mathbb{R}_0^- = 0 \quad ; \quad \text{ínf}\, \mathbb{R}^+ = \text{ínf}\, \mathbb{R}_0^+ = 0$$

La relación entre supremo y máximo de un conjunto y la relación entre ínfimo y mínimo, se especifican a continuación.

Proposición 1.
Sea A un conjunto no vacío de números reales.

i) Si A tiene máximo, entonces tiene supremo y se verifica $\sup A = \text{máx}\, A$.

ii) Si A tiene mínimo, entonces tiene ínfimo y se verifica $\text{ínf}\, A = \text{mín}\, A$.

iii) Supongamos que A tiene supremo, entonces:

- Si $\sup A \in A$, A tiene máximo y $\text{máx}\, A = \sup A$.
- Si $\sup A \notin A$, A no tiene máximo.

iv) Supongamos que A tiene ínfimo, entonces:

- Si $\text{ínf}\, A \in A$, A tiene mínimo y $\text{mín}\, A = \text{ínf}\, A$.
- Si $\text{ínf}\, A \notin A$, A no tiene mínimo.

Demostración.

i) Si x es mayorante de A, se tiene $a \leqslant x, \forall a \in A$ y como $\text{máx}\, A \in A$, $\text{máx}\, A \leqslant x$, luego $\text{máx}\, A$ es el mínimo de $M(A)$, es decir, $\text{máx}\, A = \sup A$.

ii) Análoga a la de i).

iii) Si $\sup A \in A$ $\sup A$ es un mayorante de A que pertenece a A, luego es el máximo de A. Si $\sup A \notin A$, supongamos que A tuviese máximo; entonces por i) $\text{máx}\, A = \sup A$ y $\sup A$ pertenecería a A, lo cual es absurdo.

iv) Análoga a la de iii).

La siguiente proposición es una importante caracterización del supremo y del ínfimo de un conjunto de números reales.

Proposición 2.
Sea A un conjunto no vacío de números reales y sea x un número real. Entonces:

i) $x = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, a \in A \text{ tal que } a > x - \varepsilon \end{cases}$

ii) $x = \text{ínf}\, A \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, a \in A \text{ tal que } a < x + \varepsilon \end{cases}$

Demostración.

i) $\Rightarrow$) Si $x = \sup A$, x es mayorante de A y dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $x - \varepsilon$ no puede ser mayorante de A, luego $\exists\, a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon$.
$\Leftarrow$) Por hipótesis x es un mayorante de A. Sea y un mayorante cualquiera de A. Si fuese $y < x$, sea $\varepsilon = x - y$; por hipótesis existe $a \in A$ tal que $a > x - \varepsilon = x + (y - x) = y$, lo cual es absurdo pues y era un mayorante de A. Así pues $x \leqslant y$, lo que prueba que x es el mínimo de los mayorantes de A.

ii) Análoga a i).

El último axioma

El siguiente axioma junto con todos los demás que se resumían afirmando que $\mathbb{R}$ era un cuerpo ordenado conmutativo, completa la axiomática que define el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

El axioma del supremo.
Todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.

Obsérvese que para que un conjunto de números reales tenga supremo debe ser necesariamente no vacío y mayorado. El axioma anterior nos asegura que estas dos condiciones, trivialmente necesarias, son también suficientes. Cabría preguntarse por qué no se exige análogamente que todo conjunto de números reales no vacío y minorado tenga ínfimo. A continuación veremos que esto ya se deduce a partir de nuestra axiomática.

Proposición 3.
Todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo.
Demostración.
Sea A un tal conjunto. Si notamos $-A = \{-a : a \in A\}$, comenzaremos probando que un número real m es minorante de A si, y sólo si, $-m$ es mayorante de $-A$:

$$m \in m(A) \Leftrightarrow m \leqslant a, \forall a \in A \Leftrightarrow -m \geqslant -a, \forall a \in A \Leftrightarrow -m \in M(-A)$$

Sea $h = \sup(-A)$; como h es mayorante de $-A$, $-h$ es minorante de A. Nos queda probar que $-h$ es el mayor de los minorantes del conjunto A: si m es minorante de A se tiene que $-m$ es mayorante de $-A$, luego $-m \geqslant h$ y $m \leqslant -h$ y así $-h = \text{ínf}\, A$.

Nótese que hemos probado que si A es un conjunto de números reales no vacío y minorado, entonces $-A$ está mayorado y se tiene:

$$\text{ínf}\, A = -\sup(-A)$$

Cambiando A por $-A$, si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, entonces $-A$ está minorado y se tiene:

$$\sup A = -\,\text{ínf}(-A)$$

Corolario 1.
Todo conjunto de números reales no vacío y acotado tiene supremo e ínfimo.

Aunque parezca obvio que siempre hay un número natural mayor que cualquier número real, esto se puede demostrar. De hecho, como consecuencia fundamental del axioma del supremo obtenemos a continuación el llamado *Principio de Arquímedes*, según el cual un número real cualquiera puede ser superado por el procedimiento de sumar la unidad consigo misma suficientes veces.

Teorema (Principio de Arquímedes)
El conjunto de los números naturales no está mayorado. Equivalentemente:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} : x < n$$

Demostración.
Si $\mathbb{N}$ estuviese mayorado, sea $h = \sup \mathbb{N}$. Si n es un natural cualquiera, $n+1$ es natural, luego $n+1 \leqslant h$ y $n \leqslant h-1$. Como n era arbitrario hemos probado que $h-1$ es mayorante de $\mathbb{N}$, lo cual es absurdo pues h era el mínimo de los mayorantes y $h-1 < h$.

El papel de la unidad en el principio de Arquímedes puede ser desempeñado por cualquier real positivo, obteniéndose el siguiente enunciado que no es más que una formulación equivalente del principio de Arquímedes.

Corolario 2.
Dados un real x y un real positivo ε puede encontrarse un número natural n (que dependerá de x

y de ε) tal que

$$x < n\varepsilon$$

Demostración.
Por el teorema anterior $\dfrac{x}{\varepsilon}$ no puede ser mayorante de $\mathbb{N}$, luego existe un natural n tal que $\dfrac{x}{\varepsilon} < n$, de donde $x < n\varepsilon$ pues $\varepsilon > 0$.

Una consecuencia fundamental del axioma del supremo es que nos permitirá probar la existencia de números *irracionales*. Sí, de números reales que no son racionales, es decir, que no son fracciones. Aunque parezca mentira nadie nos dijo que existían. Ya se habló de la introducción de manera natural, en las matemáticas de Secundaria, de las fracciones. Más concretamente, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{n} \;:\; p \in \mathbb{Z}\,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Pero nadie nos dijo que había más números más allá de los racionales. Como mucho fuimos capaces de demostrar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado es dos. Pero... ¿qué será esa cosa cuyo cuadrado es dos? ¿Tenemos derecho a pensar que es un número? Y si lo es, ¿qué clase de número es? Pero esto lo dejaremos para un próximo artículo...

Se proponen a continuación una colección de ejercicios relacionados con el supremo y el ínfimo de conjuntos.

1. Sea A un conjunto no vacío de números reales. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números reales pueden ser iguales a $M(A)$?: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\mathbb{R}^+$, $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leqslant x\}$.

   Solución.

   - Es imposible que $M(A) = \mathbb{R}$, ya que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no tiene mínimo.
   - Ocurrirá que $M(A) = \emptyset$ cuando A no esté acotado superiormente. Por ejemplo, si $A = \mathbb{R}$: $M(\mathbb{R}) = \emptyset$.
   - No puede darse nunca que $M(A) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, ya que $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ está acotado superiormente.
   - Si tomamos $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 2\}$, se tiene que $M(A) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leqslant x\}$.

2. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales verificando $A \subset B$. Probar que si B está mayorado (respectivamente minorado) lo está A y se verifica $\sup A \leqslant \sup B$ (respectivamente $\inf A \geqslant \inf B$).

Solución.

Si B está mayorado entonces existe $\beta = \sup B$. Como $A \subset B$ entonces existe $b \in B$ tal que $a \leqslant b \leqslant \beta, \forall a \in A$. Por tanto, A está mayorado y existe $\alpha = \sup A$. Claramente β es un mayorante de A, por tanto $\alpha \leqslant \beta$, es decir, $\sup A \leqslant \sup B$.

Si $A \subset B$ entonces también $-A \subset -B$ con lo que, por lo demostrado anteriormente, $\sup(-A) \leqslant \sup(-B)$, o lo que es lo mismo, $-\operatorname{ínf} A \leqslant -\operatorname{ínf} B \Rightarrow \operatorname{ínf} A \geqslant \operatorname{ínf} B$ (véanse los comentarios que siguen a la proposición número 3).

3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Probar que $A \cup B$ está acotado y que se verifican: $\sup(A \cup B) = \operatorname{máx}\{\sup A, \sup B\}$, $\operatorname{ínf}(A \cup B) = \operatorname{mín}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\}$.

   Solución.

   Sea $\alpha \in A \cup B$. Entonces o bien $\alpha \in A \Rightarrow \alpha \leqslant \sup A$; o bien $\alpha \in B \Rightarrow \alpha \leqslant \sup B$. En cualquier caso $\alpha \leqslant \operatorname{máx}\{\sup A, \sup B\}$. Por tanto, $A \cup B$ está mayorado y además tenemos que $\sup(A \cup B) \leqslant \operatorname{máx}\{\sup A, \sup B\}$. Por otro lado, utilizando el ejercicio anterior, como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, se tiene que $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ y también que $\sup B \leqslant \sup(A \cup B)$. Por tanto $\operatorname{máx}\{\sup A, \sup B\} \leqslant \sup(A \cup B)$. Hemos demostrado que $A \cup B$ está mayorado y que $\sup(A \cup B) = \operatorname{máx}\{\sup A, \sup B\}$.

   Sea $\beta \in A \cup B$. Entonces o bien $\beta \in A \Rightarrow \beta \geqslant \operatorname{ínf} A$; o bien $\beta \in B \Rightarrow \beta \geqslant \operatorname{ínf} B$. En cualquier caso $\beta \geqslant \operatorname{mín}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\}$. Por tanto, $A \cup B$ está minorado y además tenemos que $\operatorname{ínf}(A \cup B) \geqslant \operatorname{mín}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\}$. Por otro lado, utilizando el ejercicio anterior, como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, se tiene que $\operatorname{ínf} A \geqslant \operatorname{ínf}(A \cup B)$ y también que $\operatorname{ínf} B \geqslant \operatorname{ínf}(A \cup B)$. Por tanto $\operatorname{mín}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\} \geqslant \operatorname{ínf}(A \cup B)$. Hemos demostrado que $A \cup B$ está minorado y que $\operatorname{ínf}(A \cup B) = \operatorname{mín}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\}$.

4. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Probar que si $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$ está acotado y se verifica:

   $$\operatorname{máx}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\} \leqslant \operatorname{ínf}(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \operatorname{mín}\{\sup A, \sup B\}$$

   Probar que las anteriores desigualdades pueden ser estrictas.

   Solución.

   Puesto que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, el ejercicio 2 asegura que $A \cap B$ está acotado y además se verifica que $\operatorname{ínf}(A \cap B) \geqslant \operatorname{ínf} A$, $\operatorname{ínf}(A \cap B) \geqslant \operatorname{ínf} B$, $\sup(A \cap B) \leqslant \sup A$, $\sup(A \cap B) \leqslant \sup B$. Por tanto, por un lado $\operatorname{ínf}(A \cap B) \geqslant \operatorname{máx}\{\operatorname{ínf} A, \operatorname{ínf} B\}$ y, por otro, $\sup(A \cap B) \leqslant \operatorname{mín}\{\sup A, \sup B\}$. Como $\operatorname{ínf}(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B)$, tenemos probado el resultado.

Para probar que las desigualdades pueden ser estrictas sean $A = \{2,3,4,5\}$ y $B = \{1,3,4,8,9\}$. Se tiene que $\inf A = 2$, $\sup A = 5$, $\inf B = 1$, $\sup B = 9$. Además, $A \cap B = \{3,4\}$ con lo que $\inf(A \cap B) = 3$ y $\sup(A \cap B) = 4$. Entonces

$$\max\{\inf A, \inf B\} = 2 < \inf(A \cap B) = 3 < \sup(A \cap B) = 4 < \min\{\sup A, \sup B\} = 5$$

y las desigualdades son estrictas.

5. Dados dos conjuntos no vacíos de números reales A y B, sea $C = \{x + y \, : \, x \in A \, , \, y \in B\}$. Probar que si A y B están mayorados, C está mayorado y se verifica

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

Como aplicación calcular el supremo y el ínfimo del conjunto

$$\left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^p} \, : \, m,n,p \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución.

Sean $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Entonces $\alpha \geqslant x \, , \forall \, x \in A$ y $\beta \geqslant y \, , \forall \, y \in B$. De lo anterior se deduce que $\alpha + \beta \geqslant x + y \, , \forall \, x \in A \, , \forall \, y \in B$. Por tanto, C está mayorado y se tiene que $\sup C \leqslant \alpha + \beta = \sup A + \sup B$.

Supongamos ahora, razonando por reducción al absurdo, que $\sup C < \sup A + \sup B$. Llamemos $k = \sup A + \sup B$, $k' = \sup C$ y sea $d = \frac{1}{2}(k - k') > 0$. Por definición de supremo existen $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ tales que $\alpha - d < x_0$ y $\beta - d < y_0$. Entonces:

$$\alpha + \beta - 2d < x_0 + y_0 \Rightarrow \alpha + \beta - (\alpha + \beta - \sup C) < x_0 + y_0 \Rightarrow \sup C < x_0 + y_0$$

Llamando $z_0 = x_0 + y_0$, hemos demostrado que existe $z_0 \in C$ tal que $z_0 > \sup C$, lo cual es absurdo. Así $\sup C \geqslant \sup A + \sup B$. De esta última desigualdad y de la demostrada anteriormente, se deduce que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Dado ahora el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^p} \, : \, m,n,p \in \mathbb{N} \right\}$, sean $A_1 = \{ \frac{1}{2^n} \, : \, n \in \mathbb{N} \}$, $A_2 = \{ \frac{1}{3^m} \, : \, m \in \mathbb{N} \}$, $A_3 = \{ \frac{1}{5^p} \, : \, p \in \mathbb{N} \}$. Es claro que $\sup A_1 = \frac{1}{2}$, $\sup A_2 = \frac{1}{3}$, $\sup A_3 = \frac{1}{5}$. De este modo $\sup A = \sup A_1 + \sup A_2 + \sup A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$.

Demostremos por otro lado que $\inf A_1 = \inf A_2 = \inf A_3 = 0$. Se tiene que $\frac{1}{2^n} > 0 \, , \forall \, n \in \mathbb{N}$. Si fuera $\inf A_1 = k > 0$, entonces $0 < k \leqslant \frac{1}{2^n} \, , \forall \, n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < 2^n \leqslant \frac{1}{k} \, , \forall \, n \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción pues el conjunto $\{2^n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ no está mayorado. Así, $\inf A_1 = 0$. De igual modo se demuestra que $\inf A_2 = \inf A_3 = 0$. Entonces $\sup(-A_1) = \sup(-A_2) = \sup(-A_3) = 0$ y, por tanto:

$$\sup(-A) = \sup(-A_1) + \sup(-A_2) + \sup(-A_3) = 0 \Rightarrow \inf A = -\sup(-A) = 0$$

6. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y mayorados de números reales y sea $C = \{xy \,:\, x \in A\,,\, y \in B\}$. Probar que si $A \subset \mathbb{R}_0^+$ y $B \subset \mathbb{R}_0^+$, entonces C está acotado superiormente y se verifica

$$\sup C = \sup A \sup B$$

Como aplicación calcular el supremo del conjunto

$$\left\{ x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,:\, x \in \mathbb{R}\,,\, 2 < x < 3\,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución.

Podemos suponer que $\sup A$ y $\sup B$ son números reales positivos pues si $\sup A = 0$ o bien $\sup B = 0$, entonces $A = \{0\}$ o $B = \{0\}$, con lo que $C = \{0\}$ y $\sup C = 0$. Así, si $A \neq \{0\}$ y $B \neq \{0\}$, entonces $C \neq \{0\}$ y $\sup C > 0$.

Llamemos $k = \sup A \cdot \sup B$. Como $0 \leqslant x \leqslant \sup A\,, \forall\, x \in A$ y $0 \leqslant y \leqslant \sup B\,, \forall\, y \in B$, entonces $0 \leqslant xy \leqslant \sup A \cdot \sup B\,, \forall\, x \in A\,, \forall\,, y \in B$. De aquí se deduce que C está acotado superiormente y que $\sup C \leqslant \sup A \cdot \sup B$. Llamemos $r = \sup C$ y supongamos ahora que $\sup C < \sup A \cdot \sup B$, es decir, que $r < k$. Sea $\varepsilon = \sqrt{\frac{r}{k}}$. Obsérvese que $0 < \varepsilon < 1$, con lo que $0 < \varepsilon \cdot \sup A < \sup A$, $0 < \varepsilon \cdot \sup B < \sup B$. Tenemos así, por definición de supremo, que existen $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ tales que $0 < \varepsilon \cdot \sup A < x_0\,,\, 0 < \varepsilon \cdot \sup B < y_0$. Llamando $z_0 = x_0 y_0$, esto significa que existe $z_0 \in C$ tal que $0 < \varepsilon^2 k = r < z_0$, lo cual es absurdo pues habíamos supuesto que $r = \sup C$. Así, debe de ser $\sup C \geqslant \sup A \cdot \sup B$. Por tanto se tiene que $\sup C = \sup A \cdot \sup B$, tal y como queríamos demostrar.

Para calcular el supremo del conjunto $C = \left\{ x\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,:\, x \in \mathbb{R}\,,\, 2 < x < 3\,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$, sean $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 < x < 3\}$ y $B = \{1 - \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sup A = 3$ y $\sup B = 1$. Por tanto, como $C = \{xy \,:\, x \in A, y \in B\}$, tenemos que $\sup C = \sup A \cdot \sup B = 3 \cdot 1 = 3$.

7. Calcular el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 3x^2 - 10x + 3 < 0\} \quad ; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$$

en que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b < c < d$.

Solución.

Tenemos que

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 3x^2 - 10x + 3 < 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, (x-3)(x - \frac{1}{3}) < 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{1}{3} < x < 3 \right\}$$

con lo que $\text{ínf}\, A = \frac{1}{3}$ y $\sup A = 3$.

Sea $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$ en que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a < b < c < d$. Dado $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x-b) < 0 \\ (x-c)(x-d) < 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} (x-a)(x-b) < 0 \\ (x-c)(x-d) > 0 \end{cases}$$

Se puede comprobar con facilidad, usando la hipótesis $a < b < c < d$, que la solución del primer sistema de inecuaciones es el intervalo abierto (c, d), es decir, los números reales x tal que $c < x < d$. Del manera análoga también se puede comprobar que la solución del segundo sistema de inecuaciones es el intervalo abierto (a, b), o lo que es lo mismo, los números reales x tal que $a < x < b$. Por tanto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,:\, c < x < d\}$$

Usando el ejercicio 3 se tiene que $\text{ínf}\, A = a$ y que $\sup A = d$.

8. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales y supongamos que $a \leqslant b\,, \forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$. Probar que A está mayorado, que B está minorado y que $\sup A \leqslant \text{ínf}\, B$.

    Solución.

    Sean $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, fijos pero arbitrarios. Es claro que a_0 es un minorante de B y b_0 un mayorante de A, luego A está mayorado y B minorado. Además, como tenemos que $a \leqslant b\,, \forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B$, entonces $\sup A \leqslant b\,, \forall\, b \in B$ (pues en caso contrario, tomando $\varepsilon = \sup A - b$, existiría $a \in A$ tal que $a > \sup A - \varepsilon = b$, que es una contradicción) y, por tanto, $\sup A \leqslant \text{ínf}\, B$ (si fuera $\sup A > \text{ínf}\, B$, tomando $\varepsilon = \sup A - \text{ínf}\, B$, existiría $b \in B$ tal que $b < \text{ínf}\, B + \varepsilon = \sup A$, lo cual contradice que $\sup A \leqslant b\,, \forall\, b \in B$).